

О.Л. КОРОЛЕВ  
М.Ю. КУССЫЙ  
А.В. СИГАЛ

ПРИМЕНЕНИЕ ЭНТРОПИИ  
ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ  
ПРОЦЕССОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ  
В ЭКОНОМИКЕ

МОНОГРАФИЯ

Под редакцией профессора *А.В. Сигала*



Москва  
ИНФРА-М  
2022

**УДК 330.46 (075)**

**ББК 65в661**

**К68**

Рецензенты:

*Лившиц В.Н.*, доктор экономических наук, профессор, заслуженный деятель науки и техники РСФСР, заведующий лабораторией «Системный анализ эффективности естественных монополий» Института системного анализа Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук (Москва)

*Соложенцев Е.Д.*, доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки и техники РФ, заведующий лабораторией «Интегральных систем автоматизированного проектирования» Института проблем машиноведения Российской академии наук (Санкт-Петербург)

**Королев О.Л.**

**К68**

Применение энтропии при моделировании процессов принятия решений в экономике : монография / О.Л. Королев, М.Ю. Куссый, А.В. Сигал; под ред. проф. А.В. Сигала. — Москва : ИНФРА-М, 2022. — 202 с. — (Научная мысль). — DOI 10.12737/1865188.

ISBN 978-5-16-017653-6 (print)

ISBN 978-5-16-110270-1 (online)

Монография посвящена изучению энтропии, истории этой общенаучной категории, развития ее теории, различных аспектов применения энтропии. Энтропия — мера хаоса — является одним из базовых понятий современного естествознания. Возникнув в термодинамике еще в первой половине XIX века, понятие энтропии нашло многочисленные применения во многих отраслях знаний, в том числе в других разделах физики, в технике, информатике, биологии, экономике, в социальных науках. В монографии особое внимание уделено вопросам эволюции взглядов на понятие энтропии, разнообразным аспектам применения энтропии для моделирования процессов на финансовых рынках, методологии рекуррентного анализа временных рядов в экономике, а также разнообразным аспектам применения энтропии для теоретико-игрового моделирования процессов распределения ресурсов.

Монография будет полезной специалистам по математическому моделированию, ученым и практикам, специализирующимся на принятии управленческих решений, преподавателям, аспирантам, студентам.

**УДК 330.46 (075)**

**ББК 65в661**

ISBN 978-5-16-017653-6 (print)  
ISBN 978-5-16-110270-1 (online)

© Королев О.Л., Куссый М.Ю.,  
Сигал А.В., 2022

## Основные сокращения и обозначения

- АИ — антагонистическая игра;  
ДСВ — дискретная случайная величина;  
ИС — информационная ситуация;  
КАИ — классическая антагонистическая игра;  
ЛПР — лицо, принимающее решения;  
НАИ — неоклассическая антагонистическая игра;  
СВ — случайная величина;  
СКО — среднее квадратичное отклонение;  
ЭР — экономический риск;  
FAN — Fixed Amount of Nearest Neighbors (фиксированные числа ближайших точек);  
RP — Recurrent Plots (рекуррентные графики);  
 $\|\cdot\|$  — норма (метрика);  
AVM — среднее арифметическое показателя текущей волатильности;  
Close — цена закрытия;  
 $\mathbf{D}(X) = \sigma^2(X)$  — дисперсия (вариация) СВ  $X$ ;  
 $D_{KL}(X, Y) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \ln \frac{p_i}{q_i}$  — расстояния Кульбака — Лейблера;  
 $E$  — значение энтропии Грассбергера — Прокаччия;  
 $H(\mathbf{p}) = - \sum_{i=1}^n p_i \cdot \log_2 p_i$  — (бинарная) энтропия Шеннона;  
 $H(\mathbf{q}) = - \sum_{j=1}^n q_j \cdot \ln p_j$  — (натуральная) энтропия Шеннона;  
 $H_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \ln \left( \sum_{i=1}^n p_i^\alpha \right)$  — энтропия Реньи порядка  $\alpha$ ;  
Higt — максимальная цена;  
 $\mathbf{I} = \{1; \dots; i; \dots; k\}$  — множество чистых стратегий первого игрока;  
 $\mathbf{J}_n = (1; \dots; 1; \dots; 1)$  —  $n$ -мерный вектор, все компоненты которого равны 1;  
 $\mathbf{J} = \{1; \dots; j; \dots; n\}$  — множество чистых стратегий второго игрока;  
Low — минимальная цена;  
 $L_1 - L_1$ -норма;  
 $L_2 - L_2$ -норма (Евклидова норма);  
 $L_\infty - L_\infty$ -норма (максимальная норма);  
 $m = \mathbf{M}(X)$  — математическое ожидание СВ  $X$ ;  
Open — цена открытия;

$\mathbf{p} = (p_1; \dots; p_j; \dots; p_k)$  – стратегия первого игрока;  
 $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_i^*; \dots; p_k^*)$  – оптимальная стратегия первого игрока;  
 $(\mathbf{p}^*; \mathbf{q}^*)$  – ситуация равновесия в АИ;  
 $p_i, q_j$  – вероятность применения игроками чистых стратегий;  
 $\mathbf{q} = (q_1; \dots; q_j; \dots; q_n)$  – стратегия второго игрока;  
 $\mathbf{q}^* = (q_1^*; \dots; q_j^*; \dots; q_n^*)$  – оптимальная стратегия второго игрока;  
 $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$  – платежная матрица;  
 $r_{ij}$  – выигрыш первого игрока в ситуации  $(i; j)$ ;  
 $R_i$  – СВ, характеризующая норму прибыли актива  $i$ ;  
 $R_x$  – СВ, характеризующая норму прибыли портфеля  $\mathbf{x}$ ;  
 $R_x^*$  – СВ, характеризующая норму прибыли портфеля  $\mathbf{x}$ ;  
 $\text{supp } \mathbf{p} = \{i | p_i > 0\}$  – спектр стратегии  $\mathbf{p}$  первого игрока;  
 $\text{supp } \mathbf{q} = \{j | q_j > 0\}$  – спектр стратегии  $\mathbf{q}$  второго игрока;  
 $VM$  – показатель текущей волатильности;  
 $V(\mathbf{p}; \mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{q}^T$  – платежная функция АИ;  
 $V_{1j} = \sum_{i=1}^k r_{ij} \cdot p_i$  – ожидаемые выигрыши первого игрока;  
 $V_{11i} = \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot q_j$  – ожидаемые проигрыши второго игрока;  
 $V_{\mathbf{R}}^* = V(\mathbf{p}^*; \mathbf{q}^*)$  – значение (цена) игры;  
 $\mathbf{x} = (x_1; \dots; x_j; \dots; x_k)$  – портфель инвестора;  
 $\mathbf{x}^* = (x_1^*; \dots; x_i^*; \dots; x_k^*)$  – портфель, обладающий наименьшим уровнем риска;  
 $x_i$  – доля актива  $i$ -го вида в портфеле инвестора;  
 $\alpha = \max_i \min_j r_{ij}$  – нижняя чистая цена игры (максимин) АИ  
 $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ ;  
 $\beta = \min_j \max_i r_{ij}$  – верхняя чистая цена игры (минимакс) АИ  
 $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ ;  
 $\Gamma_{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$  – антагонистическая игра (АИ);  
 $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{D}(X)}$  – СКО СВ  $X$ ;  
 $\theta(\bullet)$  – ступенчатая функция Хевисайда.

## Предисловие

Моделирование процессов принятия решений в экономике требует учета ряда специфических условий. В первую очередь, следует учитывать, что экономика представляет собой динамическую, слабоструктурированную сложную систему, состоящую из многих элементов, в том числе из большого количества хозяйствующих единиц, находящихся в довольно тесном, непрерывном взаимодействии. Кроме того, экономика имеет ярко выраженную иерархическую, многоуровневую структуру, при этом каждый уровень иерархии интегрирует по определенным правилам (алгоритмам) информационные сигналы (потоки) другим уровням иерархии и оперирует информационными агрегатами. Наконец, следует учитывать, что социально-экономическая система характеризуется, в частности, способностью саморазвития. «Топливом», обеспечивающим развитие этой системы, является информация. Характерными особенностями, присущими практически любой информации в социально-экономических системах, являются такие элементы, как хаотичность, непредсказуемость и случайность, т.е. неопределенность.

*Неопределенность* — это фундаментальная характеристика обеспеченности процесса принятия управленческих решений необходимой информацией или, в более общей трактовке, знаниями о проблемной ситуации. Неопределенность влияет на эффективность экономической деятельности. Фундаментальная неопределенность экономической деятельности — это неопределенность ее результатов. Несомненно, неопределенность имеет место в экономической деятельности тогда, когда к этой деятельности лишь приступают. Кроме того, неопределенность может скрываться во внешне малозначимых деталях, являющихся ключевыми для успеха, нюансы которого невозможно знать заранее. Даже по вопросу, когда будет найдено решение поставленной задачи и будет ли оно вообще найдено, существует известная неопределенность.

Важно подчеркнуть, что в философском аспекте неопределенность в социально-экономической системе вызвана не столько субъективной ограниченностью наших знаний об объекте исследования и управления в данный момент времени, сколько объективной невозможностью его исчерпывающего описания адекватным языком. Следовательно, спонтанный характер процессов, которые проис-

ходят в сложной системе, внутренне присущ ей и является одним из существенных, системообразующих ее свойств. Понимание этого положения (принцип неопределенности) нашло отражение в естественных науках (например, в физике, биологии) [50].

Еще раз отметим, неопределенность — фундаментальная характеристика недостаточной обеспеченности процесса принятия управленческих решений знаниями об определенной проблемной ситуации. Неполное, недостоверное, неточное знание разнообразных параметров порождается разными причинами. Прежде всего, неполной и недостоверной информацией об условиях реализации решения, о связанных с этим решением выгодах и затратах, наличии множественности целей и многокритериальности их оценки.

Причины неопределенности в экономике разнообразны. В частности, к неопределенности приводят такие особенности процессов принятия решений в экономике, как неполнота информации, наличие динамических изменений внутренних и внешних условий развития экономических объектов, случайность многих процессов, протекающих в социально-экономических системах, наличие ошибок в прогнозировании и погрешностей при анализе сложных систем, вероятностный и/или нечеткий характер экономических параметров (например, уровня инфляции, уровня запасов полезных ископаемых, урожайности сельскохозяйственных культур, погодных условий).

Помимо неопределенности любой экономической деятельности внутренне присуща *конфликтность*. В экономической деятельности и предпринимательстве нередко возникают недоразумения, разногласия, напряженные отношения, конфликты интересов, как внутри трудовых коллективов, так и между партнерами, контрагентами, конкурентами (организациями, учреждениями и институтами). Множественность целей и многокритериальность также влекут и неопределенность, и конфликтность.

Таким образом, в экономике приходится осуществлять выбор наилучших альтернатив и принимать управленческие решения в условиях хаотичности, неопределенности, конфликтности и обусловленного ими риска. В научной и практической литературе термин «экономический риск» имеет огромное множество различных определений, интерпретаций и смыслов. Целесообразно различать понятие «экономического риска в узком смысле» как возможности наступления нежелательных событий, и понятие «экономического риска в широком смысле» как экономической категории.

Согласно определению В.В. Витлинского [18, с. 10], *экономический риск* — это экономическая категория, отображающая характерные особенности восприятия лицом, принимающим решения, объективно существующих неопределенности и конфликтности, внутренне присущих процессам определения целей, управлению, оцениванию альтернативных вариантов действий и принятию решений. Все эти процессы отягощены возможными опасностями и неиспользованными возможностями. Экономический риск имеет диалектическую объективно-субъективную структуру. Количественная оценка уровня экономического риска — это многомерная величина, характеризующая возможность отклонения от целей, от желательного (ожидаемого) результата, возможность неудачи (убытков). При этом важно учитывать влияния контролируемых (управляемых) и неконтролируемых (неуправляемых) факторов, прямых и обратных связей.

Экономический риск является характерным феноменом рыночной экономики, а приведенное его определение (в широком смысле) основывается на системном подходе к этой экономической категории. Это определение указывает на необходимость тщательного анализа влияния на экономические объекты множества внутренних и внешних факторов, а также на необходимость учета отношения к риску лица, принимающего решения.

При анализе и моделировании экономического риска, количественной оценке его уровня, принятии управленческих решений в экономике, учитывающих неопределенность и риск, применяют различные методы и модели. В частности, применяют такие направления науки, как теория вероятностей и математическая статистика, теория случайных процессов, теория нечетких множеств, математическое программирование, в том числе теория игр и теория принятия статистических решений, и т.д. Перечисленные области знаний с системных позиций объединили классические вероятностные методы с методами и моделями исследования операций, теорией управления сложных систем.

Применение энтропийного подхода существенно обогащает инструментарий и аппарат анализа и моделирования экономического риска, количественной оценки его уровня, принятия управленческих решений в экономике, как с теоретической, так и с практической точки зрения. Несомненно, энтропийный подход дает возможность учесть хаотичность и неопределенность, существенно понизить уровень экономического риска. Это, в свою очередь, позволяет повысить качество и эффективность принимаемых управ-

ленческих решений и, в частности, избежать ошибок в процессе принятия управленческих решений в экономике.

Термин «энтропия» происходит от древнегреческого слова «*ἐντροπία*», которое в переводе означает «поворот», «превращение». В качестве научной категории «энтропия» возникла в естественных науках, прежде всего в физике, а точнее — в термодинамике, в качестве меры необратимого рассеяния энергии. Коротко говоря, *энтропия* — это фундаментальное свойство произвольной, состоящей из многих элементов системы, для которой характерна неоднозначность и/или случайность поведения. При этом энтропия представляет собой меру хаоса, т.е. степень беспорядка системы и ее поведения. Чем меньшим значением обладает энтропия системы, тем большей стабильностью характеризуется деятельность этой системы. И наоборот, чем большим значением обладает энтропия системы, тем более хаотичным является функционирование такой системы. Образно говоря, энтропия представляет собой количественную меру упорядоченности элементов системы любой природы (и технической, и химической, и биологической, и экономической, и социальной, и экологической).

Термодинамика возникла благодаря желанию людей подчинить себе движущую силу пара. Поэтому сначала термодинамика занималась исследованием тепла. Однако со временем термодинамика существенно расширила сферу, так сказать, своих интересов и стала теорией о превращениях всех форм энергии. В таком виде термодинамика существует и по сей день.

Термодинамика основана на небольшом числе постулатов (аксиом), которые в сжатой форме вобрали в себя накопленный опыт по изучению энергии. Эти утверждения носят название **начал**, или **законов**, термодинамики. Всего насчитывается четыре начала (закона) термодинамики. В основе утверждений этих законов термодинамики лежит обобщение данных, полученных в результате наблюдений и проведенных испытаний.

**Нулевое начало термодинамики** было сформулировано чуть более ста лет назад. Оно утверждает следующее: независимо от начального состояния изолированной (замкнутой) системы, в конце концов в ней установится термодинамическое равновесие. При этом термодинамическое равновесие подчиняется свойству транзитивности, т.е. если система **A** находится в термодинамическом равновесии с системой **B**, а та, в свою очередь, с системой **C**, то система **A** находится в равновесии с системой **C**. **A**, **B** и **C** можно считать как отдельными системами, так и частями одной равновесной системы.



**Первое начало термодинамики** было сформулировано в середине XIX века. Согласно этому закону система может совершать работу только за счет своей внутренней энергии или каких-либо внешних источников энергии. Первое начало термодинамики часто формулируют как невозможность существования вечного двигателя первого рода, который совершал бы работу, не черпая энергию из какого-либо источника.

**Второе начало термодинамики** гласит, что невозможен самопроизвольный переход тепла от тела, менее нагретого, к телу, более нагретому. Одна из формулировок второго начала термодинамики основывается на понятии энтропии: энтропия изолированной системы не может уменьшаться (закон неубывания энтропии). Второе начало термодинамики часто формулируют как невозможность существования вечного двигателя второго рода, который имеет коэффициент полезного действия, равный единице, т.е. двигателя, который превращает в работу все сто процентов теплоты.

В своей Гиффордской лекции «Природа физического мира» известный английский астрофизик Артур Стэнли Эддингтон (1882–1944) утверждал, что закон возрастания энтропии занимает высшее положение среди других законов природы. По его мнению, если обнаружится, что какая-нибудь теория вселенной противоречит второму началу термодинамики, то такой теории «не остается ничего другого, как погибнуть в глубочайшем смирении».

**Третье начало термодинамики** гласит, что приращение энтропии при абсолютном нуле температуры стремится к конечному пределу, не зависящему от того, в каком равновесном состоянии находится система. Из третьего начала термодинамики следует, что невозможно достичь абсолютного нуля температуры ни в каком конечном процессе, связанном с изменением энтропии. К абсолютному нулю температуры можно лишь приблизиться. Поэтому третье начало термодинамики иногда формулируют как принцип недостижимости абсолютного нуля температуры.

Очевидно, энтропия играет особую роль в термодинамике. Однако энтропия нашла широкое применение не только в термодинамике, но и во многих отраслях знания. При этом смысл термина «энтропия» существенно различается в различных научных областях. Так, если в статистической физике энтропия — это мера возможности осуществления какого-либо макроскопического состояния, то в теории информации энтропия — это мера неполноты информации (знаний), а, например, в исторической науке энтропия служит мерой феномена альтернативности (вариативности) исторического процесса.

Подобно синергетике, изучающей общие закономерности явлений и процессов, протекающих в сложных неравновесных системах, на основах присущих им принципов самоорганизации, энтропийный подход следует признать междисциплинарным направлением науки. Действительно, принципы поведения систем, состоящих из многих элементов, мало зависят от природы этих систем, поэтому для моделирования поведения таких систем может быть пригоден общий математический аппарат.

Применение энтропийного подхода позволяет получить интересные результаты при анализе временных рядов, в частности при моделировании поведения различных инструментов на финансовых рынках, а также при моделировании процессов принятия управленческих решений в экономике.

Подчеркнем, что энтропийный подход является довольно сложной областью науки. В случае обращения к нему, в том числе и в случае обращения к нему в экономических исследованиях, необходимо применять системный анализ, знать границы использования энтропийного подхода. Весьма упрощенные методики применения энтропийного подхода в экономике могут вызвать угрозу ошибки, принятие неверного управленческого решения.

В монографии особое внимание уделено изучению разнообразных аспектов применения энтропийного подхода в экономико-математическом моделировании, что объясняется сферой научных интересов авторов. Применение энтропийного подхода, именно благодаря его универсальности, возможно при моделировании самых различных экономических систем (точнее, их поведения), явлений и процессов. В частности, различные виды энтропии могут быть использованы для анализа характеристик инструментов финансовых рынков, для анализа временных рядов, а также для теоретико-игрового моделирования процессов принятия решений.

Монография состоит из четырех разделов (глав): «Эволюция взглядов на понятие энтропии» (М.Ю. Куссый, А.В. Сигал), «Применение энтропии для моделирования процессов на финансовых рынках» (М.Ю. Куссый), «Энтропия и рекуррентный анализ временных рядов в экономике» (О.Л. Королев), «Применение энтропии для игрового моделирования распределения ресурсов» (А.В. Сигал).

Авторы надеются, что монография будет полезна ученым, специалистам-практикам, преподавателям вузов, аспирантам, студентам, а также всем, кто интересуется вопросами моделирования процессов принятия управленческих решений.

# Глава 1

## ЭВОЛЮЦИЯ ВЗГЛЯДОВ НА ПОНЯТИЕ ЭНТРОПИИ

Энтропийный подход является сравнительно молодым научным методом. Научная история понятия энтропии насчитывает менее двух столетий. Однако за такой короткий срок наука выработала целый ряд различных представлений о феномене энтропии. Общим для различных взглядов на понятие энтропии можно считать то, что энтропия — это всегда мера хаоса макроскопической системы. Макроскопические системы — это системы, состоящие из многих объектов, понимаемых как их элементы. Эти элементы сами по себе могут быть микроскопическими, например атомы или молекулы в физических и химических системах. Они могут быть макроскопическими: в частности, макромолекулы в полимерах, клетки в биологических структурах. Наконец, они могут быть достаточно крупными телами, как, например, «элементарные» объекты в социологии, хозяйствующие единицы в экономике.

Величина значения энтропии характеризует то, как далеко рассматриваемая система отклонилась от упорядоченного, структурированного состояния и как приблизилась она к беспорядочному, полностью хаотичному, бесструктурному, однородному виду. Существуют различные определения понятия «структура». Как правило, под структурой понимают характер организации элементов и совокупность отношений между элементами системы. Структура системы определяется характером и свойствами связей между ее элементами. Такое определение структуры не налагает никаких ограничений на природу самой системы и ее элементов. Это могут быть системы элементарных частиц, системы информационных символов, космические, биологические, социальные и/или экономические системы. Каждая система может быть отнесена к одному из трех следующих классов. Первый класс — класс высокоорганизованных систем, т.е. систем, обладающих развитой и сложной структурой. Второй класс — класс частично организованных систем, т.е. систем, обладающих не слишком сложной и не слишком простой структурой. Третий класс — класс хаотических систем, т.е. систем, обладающих случайностью распределения своих элементов, их появления, расположения и движения.

Как уже неоднократно отмечалось, энтропия является мерой хаоса. Но одновременно с этим энтропия является и мерой

структурной организованности систем, т.к. хаос и порядок — это не только противоположные, но и взаимодополняющие понятия. Это можно трактовать как единство противоположностей, равновесие или неравновесие между которыми определяет направление и темп развития (прогресса или деградации) структур в рассматриваемой системе. Таким образом, энтропию можно считать мерой хаоса/порядка, т.е. одновременно мерой и хаотичности, и упорядоченности.

Энтропия как мера хаоса/порядка изучалась в системах разной природы: это и энтропия Клаузиуса в термодинамике, и энтропия Больцмана в статистической физике, и энтропия Шеннона в теории информации, и энтропия Колмогорова в теории динамических систем, и энтропия фон Неймана в квантовой механике. Понимание универсальности энтропии как меры хаотичности и ее независимости от природы системы приходило постепенно. Так, по поводу энтропии Шеннона академик Андрей Николаевич Колмогоров утверждал: «Общеизвестно и то обстоятельство, что выражение  $H$  ( $\xi$ ) формально тождественно с выражением энтропии в физике. Это совпадение я считаю вполне достаточным для оправдания наименования величины  $H$  ( $\xi$ ) и в теории информации “энтропией”»: такие математические аналогии следует всегда подчеркивать, так как сосредоточение внимания на них содействует прогрессу науки» [29]. Один из важнейших фактов отметил Ю.Л. Климонтович: с развитием физики открытых систем стало понятно, что «среди различных макроскопических функций только энтропия  $S$  обладает совокупностью свойств, позволяющих использовать ее в качестве меры неопределенности (хаотичности) при статистическом описании процессов в макроскопических системах» [24, с. 31].

Максимально возможное значение энтропии заданной системы соответствует наименьшей степени ее структурной организованности, т.е. наибольшей хаотичности, неупорядоченности и неразберихе. Малое значение энтропии, напротив, соответствует высокой структурной упорядоченности соответствующей системы. Часто как синоним термина энтропия используют словосочетание «структурная энтропия». Этим подчеркивают тот факт, что значение энтропии характеризует степень структурной организованности (упорядоченности) системы.

### 1.1. ПРИНЦИП КАРНО

История энтропии как научного понятия началось с исследований по термодинамике, выполненных Сади Карно. **Николя Ле-**

**онар Сади Карно** (1796–1832) — французский физик и математик. За свою короткую жизнь Карно, военный инженер по профессии, успел опубликовать всего одну-единственную научную работу, являющуюся основополагающей в термодинамике.



**Николя Леонар Сади Карно (1796–1832)**

Еще в период своей военной службы Карно посещал лекции в Сорбонне, Коллеж де Франс, Консерватории искусств и ремесел. В начале 20-х годов XIX века его заинтересовали недавно появившиеся паровые машины. Свежий взгляд инженера по образованию и физика по призванию сумел проникнуть в самую суть превращения (греч. *εντροπον*) тепла в механическое движение. В 1824 году он опубликовал небольшую брошюру, название которой можно перевести так: «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развить эту силу». В этой работе Сади Карно провел анализ существовавших тогда паровых машин, ввел такие понятия термодинамики, как идеальная тепловая машина, идеальный цикл (цикл Карно), обратимость и необратимость термодинамических

процессов, а также объяснил, как и почему теплота может превращаться в работу. Размышляя о «получении движения из тепла» и анализируя полный рабочий цикл (цикл Карно) идеальной тепловой машины, он впервые пришел к выводу о том, что работа производится только при переходе тепла от нагретого тела к более холодному. Кроме того, Карно сформулировал положение о том, что величина работы обусловлена разностью температур нагревателя и холодильника и не зависит от природы вещества, работающего в тепловой машине (теорема Карно).

Наконец, как выяснилось почти 150 лет спустя, в своей работе Сади Карно сформулировал один из важнейших научных принципов современного естествознания. Этот закон называется принципом Карно, который больше известен как второе начало термодинамики, или принцип энтропии. Принцип Карно часто формулируют как **закон неубывания энтропии**: *в изолированной (замкнутой) системе энтропия не уменьшается.*

Второе начало термодинамики постулирует ограничения на направление процессов передачи тепла между телами. Существует несколько равносильных формулировок этого принципа. Одной из таких формулировок второго начала термодинамики является утверждение о невозможности создания вечного двигателя второго рода, т.е. устройства, способного превращать в работу все тепло, извлекаемое из окружающих тел.

В 1832 году Сади Карно умер во время эпидемии холеры. При жизни его труд остался неизвестным. Но Карно продолжил изучение тепловых машин и после публикации «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развить эту силу». Свои наблюдения, размышления и выводы он записывал в дневнике, намереваясь со временем их систематизировать и опубликовать. Однако судьба не предоставила ему такой возможности... Научное наследие С. Карно было утрачено, т.к. все его имущество, включая бумаги, было сожжено. Уцелела лишь одна записная книжка, которая была опубликована спустя 70 лет после его смерти — в 1902 году. Как выяснилось, в этих заметках Карно сформулировал основные положения кинетической теории, подробно обосновал принцип сохранения энергии (первое начало термодинамики), вычислил механический эквивалент теплоты. Первое начало термодинамики часто формулируют как утверждение о невозможности создания вечного двигателя первого рода, т.е. устройства, способного бесконечно совершать работу без затрат топлива или других энергетических ресурсов.

## 1.2. РЕЗУЛЬТАТЫ КЛАПЕЙРОНА

В 1834 году Бенуа Клапейрон изучил работу «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развить эту силу» и по достоинству оценил открытия, сделанные С. Карно. **Бенуа Поль Эмиль Клапейрон (1799–1864)** — французский физик и инженер. Клапейрон ознакомил широкую научную общественность своего времени с идеями Карно и развил их далее в своих работах. Клапейрону удалось формализовать принцип Карно, придав ему графическую и аналитическую форму, и вывести формулу для вычисления коэффициента полезного действия (КПД) тепловой машины.



**Бенуа Поль Эмиль Клапейрон (1799–1864)**

Полезная работа  $A$  в цикле Карно может быть вычислена по формуле

$$A = Q_1 - Q_2,$$

где  $Q_1$  — количество тепла в рабочем теле до выполнения работы,  $Q_2$  — количество тепла в рабочем теле после выполнения работы.

Клапейрон также выяснил, что количество тепла в конкретном тепловом цикле пропорционально температуре, т.е.  $Q = \lambda \cdot T$ , где  $\lambda$  — константа. КПД ( $\eta$ ) действия машины Клапейрон определил как отношение работы к затраченной теплоте:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (1.1)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  — температура рабочего тела до и после выполнения работы.

Кроме того, Клапейрон вывел уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона, часто записываемое в форме уравнения Менделеева – Клапейрона), обобщающего законы Бойля – Мариотта, Гей-Люссака и Шарля, при этом это уравнение позволяет пересчитать объем 1 моля газа для произвольных значений температуры и давления. Уравнение Менделеева – Клапейрона представляет собой формулу, устанавливающую связь между давлением  $p$ , объемом  $V$ , массой  $m$ , молярной массой  $M$  и абсолютной температурой  $T$  идеального газа:

$$p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T,$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная. В Международной системе единиц СИ универсальная газовая постоянная приблизительно равна  $R \approx 8,3144621 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ .

Результаты, полученные Карно и Клапейроном, позволили вплотную подойти к возможности введения понятия энтропии в термодинамике. Образно говоря, их достижения в исследованиях по термодинамике образуют своеобразную предысторию возникновения в науке понятия энтропии. Автором понятия «энтропия» можно назвать преподавателя физики в Цюрихской школе Рудольфа Клаузиуса. **Рудольф Юлиус Эммануэль Клаузиус** (1822–1888) — немецкий физик, механик и математик.

В 1850 году Клаузиус первым сформулировал второе начало термодинамики как закон о том, что теплота не может сама собой перейти от более холодного тела к более горячему. Другими словами, в обратимом процессе энтропия сохраняется, в необратимом процессе общая энтропия увеличивается, при этом запрещен процесс, который может вызвать уменьшение общей энтропии (например, теплая вода самопроизвольно разделяется на слой холодной воды

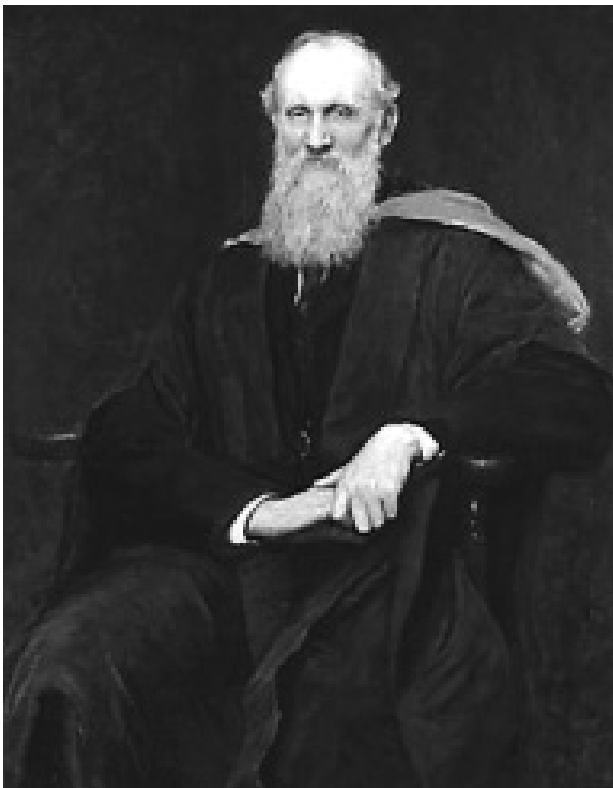


и слой горячей воды). Клаузиус не смог доказать, что этот закон действует всегда. Скорее, он постулировал это, а затем приступил к демонстрации того, что таким образом можно объяснить самые разнообразные физические явления.



**Рудольф Юлиус Эммануэль Клаузиус (1822–1888)**

В 1851 году Уильям Томпсон, профессор натуральной философии в Университете Глазго, дал несколько иную формулировку второго начала термодинамики. **Уильям Томпсон, лорд Кельвин** (1824–1907) — британский физик и механик. Именно Томпсон предложил использовать термин «энтропия» для меры превращений энергии. Как отмечалось выше, термин «τροπή» в переводе с греческого языка означает «изменение», «превращение», «преобразование», «обращение внутрь». При этом учитывался тот факт, что эта величина как раз и является мерой превращения тепловой энергии в механическую энергию, и наоборот.



**Уильям Томпсон, лорд Кельвин (1824–1907)**

### **1.3. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНТРОПИИ**

Рудольф Клаузиус ввел представление о новой термодинамической величине, которую он назвал *термодинамической энтропией*. Подставляя соотношения из уравнения (1.1) в выражение для полезной работы  $A$ , для цикла Карно получаем соотношение

$$A = Q_1 - Q_2 = Q_1 \cdot \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = Q_1 \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Следовательно, в цикле Карно справедливы пропорции  $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$  или  $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$ . Таким образом, в цикле Карно значение отношения  $\frac{Q}{T}$

является постоянной величиной. Этой постоянной величине и было дано название энтропия.

Далее Клаузиус определил изменение энтропии термодинамической системы при обратимом процессе как отношение приращения  $\Delta Q$  общего количества тепла к величине абсолютной температуры  $T$ , т.е. тепло, переданное системе при постоянной температуре:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}. \quad (1.2)$$

Формула (1.2) применима только для изотермического процесса, т.е. процесса, происходящего при постоянной температуре. Обобщение формулы (1.2) в случае произвольного квазистатического процесса выглядит следующим образом:  $dS = \frac{\delta Q}{T}$ , где  $dS$  — дифференциал энтропии,  $\delta Q$  — бесконечно малое приращение теплоты. Квазистатическим процессом называют идеализированный процесс, состоящий из непрерывно следующих друг за другом состояний равновесия. Термодинамическое равновесие — это состояние системы, при котором остаются неизменными по времени макроскопические величины этой системы (температура, давление, объем) в условиях изолированности от окружающей среды. Изолированность системы означает, что система не обменивается веществом и энергией всех их возможных разновидностей с окружающей средой.

Предельный переход в соотношении (1.2) приводит к дифференциалу  $dS = \frac{dQ}{T}$ , в котором приращение энтропии определяется как изменение тепловой энергии  $dQ$ , деленное на абсолютную температуру  $T$ . Из этого соотношения следует, что разность энтропий для двух равновесных состояний системы равна соответствующему интегралу:

$$S_1 - S_2 = \int \frac{dQ}{T}. \quad (1.3)$$

Подобно потенциальной энергии, термодинамическая энтропия определяется с точностью до произвольной постоянной. Это связано с тем, что формула (1.3) не дает возможности определить абсолютное значение термодинамической энтропии.

Наконец, равенство  $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$ , выполняющееся в цикле Карно, позволяет обосновать то, что значение интеграла Клаузиуса  $S$  зависит только от состояния системы и не зависит от пути интегрирования в пространстве  $(V, T)$ . Действительно,  $S_1(V_1, T_1) - S_2(V_2, T_2) = \int \frac{dQ}{T} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$ . Таким образом, интеграл Клаузиуса  $S$  является функцией, зависящей только от состояния системы.

Приведем строгую формулу измерения энтропии системы. Для простоты ограничимся рассмотрением механических систем, термодинамические состояния которых определяются объемом  $V$  и давлением  $P$ . Если первоначальное состояние имеет такой же объем, как и конечное состояние, то значение энтропии любого состояния  $(P, V)$  по отношению к первоначальному состоянию  $(P_0, V_0)$  равно

$$S(P, V) = S(P_0, V_0) + \int_{T(P_0, V_0)}^{T(P, V)} \frac{C_V(P, V(T, P))}{T} dT,$$

где  $C_V$  — теплоемкость при постоянном объеме. А если первоначальное состояние имеет такое же давление, как и конечное состояние, то значение энтропии любого состояния  $(P, V)$  по отношению к первоначальному состоянию  $(P_0, V_0)$  равно

$$S(P, V) = S(P_0, V_0) + \int_{T(P_0, V_0)}^{T(P, V)} \frac{C_P(P, V(T, P))}{T} dT,$$

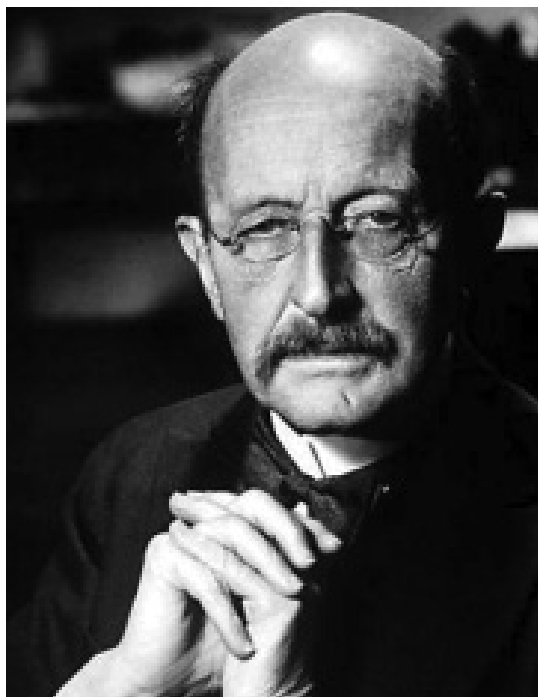
где  $C_P$  — теплоемкость при постоянном давлении. Очевидно, точная формула измерения энтропии системы зависит от выбора промежуточных состояний.

Единицей измерения термодинамической энтропии Клаузиуса является  $\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ . Несложно перейти к безразмерной энтропии. Для этого размерную энтропию следует разделить на некоторую физическую постоянную, связывающую температуру и энергию:

$$S = \frac{1}{k} \cdot \int \frac{dQ}{T}, \quad (1.4)$$

где  $k$  — константа, экспериментальное значение которой в Международной системе единиц СИ равно  $k = 1,3806 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ . В послед-

ствии константу  $k$  Макс Планк назвал постоянной Больцмана. **Макс Карл Эрнст Людвиг Планк** (1858–1947) — немецкий ученый, один из основоположников квантовой физики, лауреат Нобелевской премии по физике 1918 года. Отметим, что именно Макс Планку принадлежит формулировка второго начала термодинамики в виде принципа возрастания энтропии и использование этого принципа для решения различных задач физической химии. Очевидно, числовое значение постоянной Больцмана очень мало. Так как в формуле (1.4) она находится в знаменателе, даже в самых простых термодинамических системах изменения безразмерной энтропии очень велики.



**Макс Карл Эрнст Людвиг Планк (1858–1947)**

Интеграл Клаузиуса так и остался бы известным лишь специалистам по теплофизике, если бы идея о превращениях энергии не была распространена на все процессы. Более того, Уильям Томпсон распространил эту идею на всю Вселенную и, основываясь на втором начале термодинамики, пришел к выводу о неизбежности тепловой смерти Вселенной.

Тепловая смерть — это термин, характеризующий конечное состояние любой замкнутой термодинамической системы и, в частности, Вселенной. Согласно второму началу термодинамики, любая физическая система, не обменивающаяся энергией с другими системами (для Вселенной в целом такой обмен, очевидно, невозможен), стремится к наиболее вероятному равновесному состоянию, т.е. к состоянию, обладающему максимально возможным значением энтропии. Для Вселенной такое состояние и представляет собой ее тепловую смерть. Споры о неизбежности тепловой смерти Вселенной не утихают до сих пор. При этом трудно сказать, что больше движет участниками этой научной дискуссии: желание дойти до самой сути и выяснить истинную судьбу видимого мира, эсхатологические ожидания или инстинкт самосохранения.

Малопонятный, но звучный термин «энтропия» и в первую очередь апокалиптический сюжет с тепловой смертью Вселенной сделали свое дело и об энтропии заговорили все: от философов и теологов до журналистов и простых обывателей, при этом каждый вкладывал в это слово свой смысл. Из чисто научного термина постепенно «энтропия» превратилась в обыденное слово [91]. В сознании широкой публики второе начало термодинамики и по сей день окружено величественным нимбом загадочности. Об энтропии пишут стихи и песни, читают лекции, как научные, так и популярные. Тем не менее, доминирует мнение, что просто и доступно объяснить суть этого понятия невозможно.

#### 1.4. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНТРОПИИ

Крупнейший ученый Людвиг Больцман потратил значительную часть жизни, стараясь объяснить смысл энтропии. **Людвиг Больцман** (1844–1906) — австрийский физик, основатель статистической механики и молекулярно-кинетической теории. Сразу отметим, что переоценить вклад Больцмана в учение об энтропии невозможно. Один из ведущих специалистов в области кинетической теории и статистической физики, известный итальянский физик-теоретик Карло Черчиньяни (1939–2010), написавший биографическую книгу [101] о Л. Больцмане, следующим образом характеризует важность его работ в этой области: «Только хорошо поняв второе начало термодинамики, можно ответить на вопрос, почему вообще возможна жизнь». Все живые существа вынуждены постоянно поддерживать в порядке свои форму и структуру, борясь с всеобщей тенденцией к рассеянию, беспорядку и хаосу. Клаузиус считал, что именно эту тенденцию и описывает второе начало термодинамики.



**Людвиг Больцман (1844–1906)**

В 1877 году Людвиг Больцман установил связь энтропии с вероятностью состояния системы. Несколько позже Макс Планк представил эту связь в виде следующей формулы:

$$S = k \cdot \ln W, \quad (1.5)$$

где  $S$  — энтропия термодинамического состояния системы,  $k$  — постоянная Больцмана,  $W$  — статистический вес состояния системы, который равен числу возможных микросостояний (способов), с помощью которых можно составить данное макроскопическое состояние системы.

Альберт Эйнштейн (1879–1955) назвал этот постулат принципом Больцмана. Принцип Больцмана положил начало статистической механике, которая описывает термодинамические системы, используя статистическое поведение составляющих их компо-

нент. Принцип Больцмана связывает микроскопические свойства системы ( $W$ ) с одним из ее термодинамических свойств ( $S$ ). Согласно определению, энтропия является функцией состояния, т.е. не зависит от способа достижения этого состояния, а определяется параметрами этого состояния. Так как  $W$  может быть только натуральным (и наверняка большим двойки) числом, то, исходя из свойств логарифма, можно утверждать, что энтропия Больцмана всегда принимает только неотрицательные значения.

Больцману удалось дать кинетическую интерпретацию энтропии. Он показал, что логарифм числа  $W$  равновероятных микросостояний термодинамической системы обладает всеми свойствами термодинамической энтропии Клаузиуса, а умножение логарифма числа  $W$  на специальную константу  $k = 1,3806 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$  дает функцию (1.5), которая полностью тождественна (в физическом смысле) размерной энтропии Клаузиуса.

Людвиг Больцман, вводя физико-статистическое определение энтропии, заметил, что энтропия характеризует недостающую информацию о системе. Следовательно, энтропия представляет собой меру неполноты информации о системе. Таким образом, Больцман первым разглядел информационный смысл энтропии. Лишь через 80 лет теоретико-информационная интерпретация энтропии стала общепризнанной.

Несомненно, формула (1.5) является удивительным научным открытием Больцмана. Поначалу научное сообщество восприняло идеи Больцмана об энтропии с недоверием и даже враждебностью. Но в конце концов научный подвиг Больцмана по выявлению кинетической и информационной природы энтропии был оценен по достоинству. Неслучайно на надгробном камне могилы Людвигу Больцмана, расположенной на Центральном кладбище Вены, выбита формула « $S = k \cdot \log W$ ».

Рассмотрим более подробно глубинный физический смысл формулы (1.5). Как отмечалось, основная переменная, участвующая в этой формуле, имеет следующий смысл:  $W$  — это статистический вес макросостояния системы. Он равен числу способов, с помощью которых можно составить данное макроскопическое состояние системы. Для вычисления значения числа  $W$  обычно фазовый объем системы разбивают на  $n$  шестимерных (три пространственные координаты и три временные для характеристики движения в каждом из трех направлений) кубов. Обозначим через  $N_i$  число частиц в  $i$ -м кубе, а через  $N$  — общее число частиц. Тогда справедливо равенство



$$N = \sum_{i=1}^n N_i.$$

Очевидно, число перестановок всех частиц равно факториалу от общего числа частиц:  $N!$ . Но в рамках данного разбиения перестановки частиц внутри каждого куба можно не различать. Поэтому число способов, с помощью которых можно составить данное макроскопическое состояние системы, равно значению соответствующего полиномиального коэффициента [65, с. 53]:

$$C_N(N_1; N_2; \dots; N_n) = \binom{N}{N_1, N_2, \dots, N_n} = \frac{N!}{N_1! \cdot N_2! \cdot \dots \cdot N_n!}. \quad (1.6)$$

Подставляя выражение (1.6) в формулу (1.5) и воспользовавшись формулой Стирлинга  $\ln(m!) \approx m \cdot \ln(m) - m$ , получаем соотношение

$$S \approx k \cdot \left( N \cdot \ln N - \sum_{i=1}^n N_i \cdot \ln N_i \right). \quad (1.7)$$

Так как  $N_i \cdot \ln N_i = N \cdot (f_i \cdot \ln f_i + f_i \cdot \ln N)$ , где  $f_i = \frac{N_i}{N}$ , имеем

$$S \approx -N \cdot k \cdot \sum_{i=1}^n f_i \cdot \ln f_i. \quad (1.8)$$

Разделим левую и правую части равенства (1.8) на  $N$ . Получим удельную энтропию, т.е. энтропию, приходящуюся на одну частицу. Выполнив переход к так называемому термодинамическому пределу  $\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_i = f(x, v) dx dv$ , получаем, что удельная энтропия Больцмана  $S_B$  равна

$$S_B = -k \cdot \int_{\mu} f(x, v) \ln f(x, v) dx dv + S_0, \quad (1.9)$$

где  $dx dv$  — элемент шестимерного фазового  $\mu$ -пространства,  $f(x, v)$  — функция распределения,  $S_0$  — произвольная постоянная. Поэтому в классической термодинамике можно говорить только о разности энтропий. Таким образом, формула (1.9) дает определение удельной энтропии Больцмана, выраженной в терминах функции распределения элементов системы в шестимерном фазовом  $\mu$ -пространстве. Фазовое пространство — это пространство,

на котором представлено множество всех состояний системы таким образом, что каждому из этих состояний соответствует своя точка фазового пространства.

### 1.5. ЭНТРОПИЯ ГИББСА

В 1876 году Джозайя Гиббс в своей фундаментальной работе «Основные принципы статистической механики» [14] ввел энтропию, используя распределение плотности вероятностей состояний. **Джозайя Уиллард Гиббс (1839–1903)** — американский физик, физикохимик, математик и механик, один из создателей векторного анализа, статистической физики и математической теории термодинамики. В 1901 году Гиббс был удостоен Медали Копли Лондонского королевского общества, высшей награды международного научного сообщества того времени. Медаль Копли учреждена в 1731 году и вручается ежегодно только одному ученому за достижения в какой-либо из областей науки. Гиббсу была присуждена Медаль Копли за то, что он стал «первым, кто применил второй закон термодинамики для всестороннего рассмотрения соотношения между химической, электрической и тепловой энергией и способностью к совершению работы».

Основные работы Гиббса относятся к химической термодинамике, математической теории термодинамики и статистической физике. Гиббс разработал так называемые энтропийные диаграммы, играющие большую роль в технической термодинамике, показал, что трехмерные диаграммы позволяют представить все термодинамические свойства вещества.

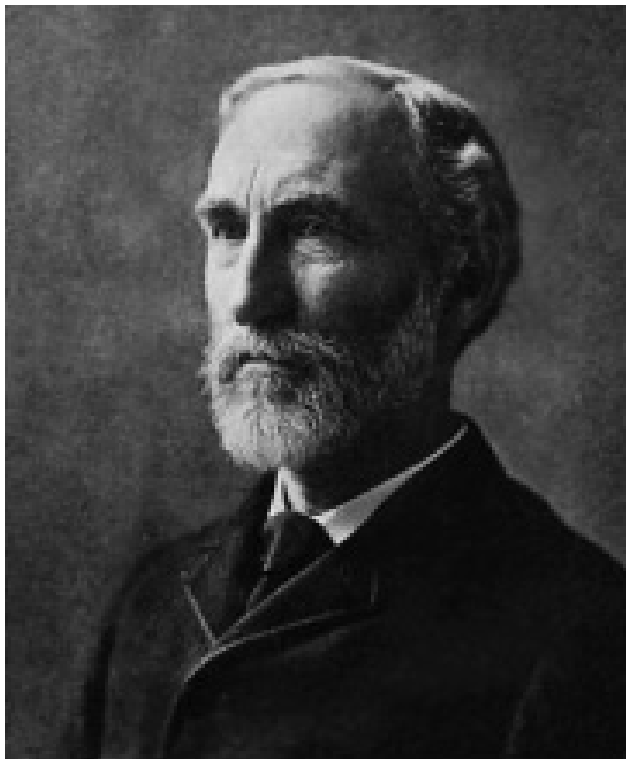
Интерес Гиббса к исследованию вопросов равновесия и энтропии подтверждает тот факт, что в качестве эпиграфа к одной из своих статей Гиббс выбрал крылатую фразу Клаузиуса: «Энергия мира постоянна. Энтропия мира стремится к максимальной». Впрочем, справедливости ради, отметим, что в последнее время ряд ученых выражают сомнения различной степени в справедливости принципа возрастания энтропии.

Рассмотрим энтропию, введенную Гиббсом. Пусть  $F(X)$  — распределение плотности вероятностей состояний по фазовому  $6N$ -мерному  $\Gamma$ -пространству статистико-физической системы, тогда энтропия Гиббса представляет собой следующий интеграл

$$S_G = -k \cdot \int_{\Gamma} F(X) \ln F(X) d\Gamma + S_0,$$

где  $X$  —  $6N$ -мерная координата этого пространства. Гиббс пришел к выводу, что его путь, в частности, приводит к результату Бо-

льцмана, если пренебречь корреляциями между частицами, т.е. если положить вероятность  $F(X)$  равной произведению вероятностей  $f(x, v)$ . Таким образом, энтропия Гиббса  $S_G$  обобщает энтропию Больцмана, т.к. формально учитывает корреляции состояний. По сути, энтропия Гиббса стала первым существенным обобщением понятия энтропии со времени Клаузиуса [91].



**Джозайя Уиллард Гиббс (1839–1903)**

Отметим, что Гиббс в своих исследованиях по термодинамике и теории энтропии опирался прежде всего на работы Клаузиуса и Гельмгольца. Герман Людвиг Фердинанд фон Гельмгольц (1821–1894) — немецкий физик, врач, физиолог и психолог. Уже в своих первых научных работах при изучении процессов брожения и теплообразования в живых организмах Гельмгольц пришел к формулировке закона сохранения энергии.

Впоследствии идеи Гиббса были развиты такими крупными физиками, как Джеймс Максвелл и Макс Планк. **Джеймс Клерк**

**Максвелл** (1831–1879) — британский физик, математик и механик, заложивший основы современной классической электродинамики. Максвелл одним из первых ввел в физику статистические представления, показал статистическую природу второго начала термодинамики, получил такие важные результаты в молекулярной физике и термодинамике, как термодинамические соотношения Максвелла, правило Максвелла для фазового перехода жидкость – газ.



**Джеймс Клерк Максвелл (1831–1879)**

В 1867 году Максвелл придумал мысленный эксперимент, иллюстрирующий кажущееся нарушение второго начала термодинамики. Этот мысленный эксперимент принято называть «демоном Максвелла», как и главного персонажа этого эксперимента. Демон Максвелла — это воображаемое разумное существо микроскопического размера, позволяющее в сосуде, наполненном газом и разделенном пополам непроницаемой перегородкой, проникать быстрым (горячим) молекулам газа только из левой половины сосуда в его правую половину, а медленным (холодным) молекулам — только

из правой половины в левую. Через большой промежуток времени горячие молекулы газа окажутся в правой половине сосуда, а холодные — в левой. Таким образом, получается, что демон Максвелла позволяет нагреть правую часть сосуда и охладить левую без дополнительного подвода энергии к системе. Энтропия для системы, состоящей из правой и левой частей сосуда, в начальном состоянии больше, чем в конечном, что противоречит термодинамическому принципу необувания энтропии в замкнутых системах.

Интересно отметить, что Максвелл с чисто механической точкой зрения не являлся сторонником второго начала термодинамики. Однако Максвелл был первым, кто осознал статистический характер второго начала. Согласно Максвеллу, оно может нарушаться отдельными молекулами, но остается справедливым для больших совокупностей частиц. Для иллюстрации этого положения Максвелл и предложил парадокс, известный как «демон Максвелла» (термин предложен Томсоном, сам Максвелл предпочитал слово «клапан»). Парадокс демона Максвелла был разрешен уже в XX веке в работах польского физика Мариана Смолуховского (1872–1917), указавшего на роль флуктуаций в самом управляющем элементе, и американского физика Лео Сциларда (1898–1964), показавшего, что получение «демоном» информации о молекулах приводит к повышению энтропии. Таким образом, второе начало термодинамики не нарушается. Системы с демоном Максвелла много раз моделировались в лабораторных условиях, при этом использовались такие системы, как броуновские частицы, молекулярные машины, фотонные и электронные системы, ультрахолодные атомы и даже молекулы ДНК. В 2010 году мысленный эксперимент «демон Максвелла» в реальности удалось реализовать группе физиков из двух японских университетов (Тюо и Токийского университета). Кроме того, в 2018 году физики в США упорядочили систему из 50 помещенных в трехмерную оптическую ловушку атомов цезия с помощью реального аналога демона Максвелла [109], а в 2020 года была опубликована статья [98] Бьорна Аннби-Андерссона, Питера Самуэльссона, Вилле Ф. Майзи и Патрика П. Поттса о создании системы из двух квантовых точек с одноэлектронными переходами для оценки термодинамических характеристик демона Максвелла с учетом информации и возвратного действия измерений.

Интересно отметить, что научные труды Гиббса привлекли к себе большое внимание и повлияли на деятельность многих ученых, работавших в самых разных областях науки, в том числе и в экономической науке. Так, американский инженер Говард Скотт (1890–1970) призывал активно применять результаты Гиббса,

полученные им в термодинамике, векторном анализе и математической физике, в сфере исследования экономических и других социальных явлений. В 1932 году Скотт написал эссе об энергетической регуляции экономики «Термодинамическая интерпретация социальных явлений».

Скотт цитировал Гиббса как интеллектуального научного протца концепций технократии. Особенное влияние на Скотта оказали работы Гиббса в термодинамике и линейном векторном анализе. Идеи, которые Скотт почерпнул из этих работ, привели к понятиям *расчета энергетических потребностей (энергетического учета)*.

Энергетический учет — это система, используемая в системах энергетического управления, где измерение и анализ энергетического потребления осуществляется с целью улучшения энергетической эффективности в пределах организации. Энергетическая экономика относится к направлению экономической мысли, называемому «термоэкономика», широкой научной предметной области, которая изучает снабжение энергией и ее использование в обществе. Термоэкономисты утверждают, что экономические системы всегда включают в себя вещество, энергию, энтропию и информацию. Более того, целью экономической деятельности является достижение определенной структуры. Имеются и термоэкономические попытки применения для моделирования экономической деятельности, как теории неравновесной термодинамики, изучающей структурные образования, называемые диссипативными структурами, так и теории информации, в которой центральной конструкцией является информационная энтропия. При этом функцией экономической деятельности считается создание недостающих ресурсов из естественных потоков энергии и материи. В терминологии термодинамики экономическая деятельность представляет собой развитие диссипативной системы, осуществляемое за счет превращения и обмена ресурсами, товарами и услугами. Эти процессы включают в себя комплексные сети потоков энергии и материи.

Отметим также, что в экономику концепцию энтропии первым ввел американский экономист румынского происхождения Николас (Николае) Джорджеску-Реген (1906–1984). Одно из главных произведений Джорджеску-Регена [104] называется «Закон энтропии и экономический процесс». Дальнейшее развитие идей Джорджеску-Регена привело к течению экономической мысли, которое называют «экологическая экономика». В частности, последователи экономических взглядов Джорджеску-Регена, основоположники

экологической экономики американский ученый Герман Эдвард Дейли (род. 1938) и японский ученый Козо Маюми (род. 1954) распространили теорию Джорджеску-Регена об энтропии на исследования в энергетическом анализе.

Интересно, что работы Гиббса оказали существенное влияние на формирование научных взглядов известного американского экономиста, первого президента (1931–1934) Международного эконометрического общества Ирвинга Фишера (1867–1947), работы которого по количественной теории денег привели к возникновению в середине XX века макроэкономической теории монетаризма, являющейся одним из главных направлений неоклассической экономической мысли.

### 1.6. ЭНТРОПИЯ ШЕННОНА

Клод Шеннон первым начал интерпретировать передаваемые сообщения и шумы в каналах связи с точки зрения статистики, рассматривая как конечные, так и непрерывные множества сообщений. **Клод Элвуд Шеннон** (1916–2001) — американский инженер и математик, основатель теории информации, т.е. теории обработки, передачи и хранения информации. Клода Шеннона называют «отцом теории информации».

Одной из самых известных научных работ Клода Шеннона является его статья «Математическая теория связи» [93, с. 243–332], опубликованная в 1948 году [124]. В этой работе Шеннон, исследуя проблему рациональной передачи информации через зашумленный коммуникационный канал, предложил вероятностный подход к пониманию коммуникаций, создал первую истинно математическую теорию энтропии как меры случайности и ввел меру дискретного распределения  $\mathbf{p}$  вероятности на множестве альтернативных состояний передатчика и приемника сообщений. Шеннон задал требования к измерению энтропии и вывел формулу, ставшую основой количественной теории информации:

$$H(\mathbf{p}) = -\sum_{i=1}^n p_i \cdot \log_2 p_i. \quad (1.10)$$

Здесь  $n$  — число символов, из которых может быть составлено сообщение (алфавит),  $H$  — информационная двоичная энтропия. На практике значения вероятностей  $p_i$  в формуле (1.10) заменяют их статистическими оценками:  $p_i = \frac{N_i}{N}$  — относительная частота  $i$ -го

символа в сообщении, где  $N$  — число всех символов в сообщении,  $N_i$  — абсолютная частота  $i$ -го символа в сообщении, т.е. число встречаемости  $i$ -го символа в сообщении.



**Клод Элвуд Шеннон (1916–2001)**

Величину (1.10) также называют *средней энтропией сообщения*, а величину  $\log_2 \frac{1}{p_i}$  — *частной энтропией*, характеризующей отдельно взятый  $i$ -й символ. Определение (1.10) для дискретных случайных событий легко можно обобщить для непрерывной функции распределения вероятностей.

Во введении к своей статье «Математическая теория связи» Шеннон отмечает, что в этой статье он расширяет теорию связи, основные положения которой содержатся в важных работах Найквиста и Хартли.

Гарри Найквист (1889–1976) — американский инженер шведского происхождения, один из пионеров теории информации. Первые результаты Найквиста по определению ширины частотного диапазона, требуемого для передачи информации, опубликованные



в статье [117], заложили основы для последующих успехов Клода Шеннона в разработке теории информации.

**Ральф Винтон Лайон Хартли** (1888–1970) — американский ученый-электронщик. В 1928 году Хартли ввел логарифмическую меру информации [107]  $H = K \cdot \log_2 N$ , которую часто называют хартлиевским количеством информации. Хартли принадлежит следующая важная теорема о необходимом количестве информации: если в заданном множестве  $M$ , состоящем из  $N$  элементов, содержится элемент  $x$ , о котором известно только то, что он принадлежит этому множеству  $M$ , то, чтобы найти  $x$ , необходимо получить об этом множестве количество информации, равное  $\log_2 N$  бит.



**Ральф Винтон Лайон Хартли (1888–1970)**

Отметим, что название БИТ произошло от английской аббревиатуры BIT — Binary digiT. Этот термин впервые был предложен американским математиком Джоном Тьюки в 1946 году. **Джон Уайлдер Тьюки** (1915–2000) — американский математик. Тьюки избрал бит для обозначения одного разряда в двоичной системе счисления. Хартли и Шеннон использовали бит как единицу измерения информации.



**Джон Уайлдер Тьюки (1915–2000)**

Вообще, энтропия (1.10) — это энтропия множества вероятностей  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Строго говоря, если  $X$  — конечная дискретная случайная величина, а  $p_1, p_2, \dots, p_n$  — вероятности всех ее возможных значений, то функция (1.10) задает энтропию этой случайной величины, при этом хотя  $X$  и не является аргументом энтропии, можно

записывать  $H(X) = -\sum_{i=1}^n p_i \cdot \log_2 p_i$ . Аналогично, если  $Y$  — конечная

дискретная случайная величина, а  $q_1, q_2, \dots, q_m$  — вероятности всех ее возможных значений, то для этой случайной величины можно за-

писывать  $H(Y) = -\sum_{j=1}^m q_j \cdot \log_2 q_j$ .

Шеннон назвал функцию (1.10) энтропией по совету Джона фон Неймана. Нейман убеждал, что эту функцию следует назвать энтропией по двум причинам: во-первых, эта функция неопределенности была использована в статистической механике под этим именем, а, во-вторых, и что более важно, «никто не знает, что такое энтропия на самом деле». Надо полагать, что этот совет Неймана не был простой шуткой. Скорее всего, и Джон фон Нейман, и Клод Шеннон знали об информационной интерпретации энтропии Больцмана как о величине, характеризующей неполноту информации о системе.

В определении Шеннона *энтропия* — это количество информации, приходящейся на одно элементарное сообщение источника, вырабатывающего статистически независимые сообщения, при этом функция энтропии должна удовлетворять следующим условиям (аксиомам):

1) функция  $H(\mathbf{p}) = H(p_1; p_2; \dots; p_n)$  должна быть определена и непрерывна на множестве  $\left\{ \mathbf{p} = (p_1; p_2; \dots; p_n) \mid p_j \in [0; 1], j = \overline{1, n}, \sum_{j=1}^n p_j = 1 \right\}$ ;

2) если  $n$  — натуральное число, то должно выполняться неравенство  $H\left(\underbrace{\frac{1}{n}; \frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n}}_n\right) < H\left(\underbrace{\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1}; \dots; \frac{1}{n+1}}_{n+1}\right)$ .

3) если  $\lambda$  — число, удовлетворяющее соотношениям  $0 < \lambda < 1$ , то должно выполняться равенство

$$H(p_1; p_2; \dots; p_{n-1}; \lambda \cdot p_n; (1 - \lambda) \cdot p_n) = H(p_1; p_2; \dots; p_n) + p_n \cdot H(\lambda; 1 - \lambda).$$

Шеннон доказал, что единственная функция, которая удовлетворяет всем этим условиям, имеет вид

$$H(\mathbf{p}) = -K \cdot \sum_{i=1}^n p_i \cdot \log_2 p_i, \quad (1.11)$$

где  $K$  — константа, являющаяся положительным числом и определяющая выбор удобной единицы измерения. Очевидно, если  $K = 1$ , то получим информационную двоичную энтропию (1.10).

Перечислим основные математические свойства энтропии (1.11):

1) неотрицательность:  $H(\mathbf{p}) \geq 0$ ;

2)  $H(\mathbf{p}) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{p} = \mathbf{e}_i$  —  $n$ -мерный вектор,  $i$ -я компонента которого равна числу 1, а все остальные компоненты — числу 0;

3) энтропия  $H(\mathbf{p})$  — выпуклая вверх непрерывная функция распределения  $\mathbf{p} = (p_1; p_2; \dots; p_n)$  вероятностей элементов (символов);

4.  $\left(\underbrace{\frac{1}{n}; \frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n}}_n\right)$  — единственная точка максимума энтропии  $H(\mathbf{p})$ ;

5.  $H\left(\underbrace{\frac{1}{n}; \frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n}}_n\right) = K \cdot \log_2 n \geq 0$ ;

6) если  $n \geq 2$ , то  $H\left(\underbrace{\frac{1}{n}; \frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n}}_n\right) = K \cdot \log_2 n > 0$ ;

7) ограниченность:  $0 \leq H(\mathbf{p}) \leq K \cdot \log_2 n$ ;

8) пусть  $X, Y$  — конечные дискретные случайные величины с  $m, n$  возможными значениями соответственно,  $p(i, j)$  — вероятность совместного осуществления событий  $X = x_i$  и  $Y = y_j$ , тогда  $H(X; Y) = -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(i, j) \cdot \log_2 p(i, j)$  — энтропия совместного распределения,

$H(X) = -\sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n p(i, j) \right) \cdot \log_2 \sum_{j=1}^n p(i, j)$  — энтропия случайной величины  $X$ ,

$H(Y) = -\sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m p(i, j) \right) \cdot \log_2 \sum_{i=1}^m p(i, j)$  — энтропия случайной величины  $Y$ , при этом выполняется неравенство  $H(X; Y) \leq H(X) + H(Y)$ , а равенство  $H(X; Y) = H(X) + H(Y)$  возможно тогда и только тогда, когда случайные величины  $X, Y$  являются независимыми, т.е.  $p(i, j) = p_i \cdot q_j$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , где  $p_i = \sum_{j=1}^n p(i, j)$ ,

$q_j = \sum_{i=1}^m p(i, j)$ ,  $j = \overline{1, n}$ ;

9) если случайные величины  $X, Y$  имеют одинаковое распределение вероятностей, то  $H(X) = H(Y)$ .

Очевидно, значение энтропии (1.11) не зависит от символов, составляющих алфавит, а зависит только от распределения  $\mathbf{p} = (p_1; p_2; \dots; p_n)$  вероятностей этих символов.

В общем случае  $b$ -арная энтропия определяется формулой

$$H_b(\mathbf{p}) = -\sum_{i=1}^n p_i \cdot \log_b p_i,$$

частными случаями которой являются бинарная ( $b = 2$ ), тринарная ( $b = 3$ ), тетрарная ( $b = 4$ ), декарная ( $b = 10$ ) и натуральная ( $b = e \approx 2,718281828$ ) энтропии. От основания логарифма зависят единицы измерения информации: в случае  $b = 2$  единицей измерения информации является *бит*,  $b = 3$  — *трит*,  $b = 4$  — *тетрит*,  $b = 10$  — *хартли* (*дит*),  $b = e$  — *нат*.

В случае измерения средней информации непрерывного источника используется **дифференциальная энтропия**, которая определяется по формуле

$$H = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log_2 f(x) dx,$$

где  $f(x)$  — плотность распределения сигнала непрерывного источника как случайной величины. Для дифференциальной энтропии справедливы свойства, аналогичные свойствам энтропии дискретного источника.

Если следование символов алфавита не является независимым, то количество информации, которую несет последовательность таких символов (а следовательно, и энтропия), очевидно, меньше. Для учета таких фактов используется *условная энтропия*.

Наконец, *взаимная энтропия*, или *энтропия объединения*, предназначена для расчета энтропии взаимосвязанных систем (энтропии совместного появления статистически зависимых сообщений).

## 1.7. ЭНТРОПИЯ КОЛМОГорова

**Андрей Николаевич Колмогоров** (1903–1987) — советский ученый, один из крупнейших математиков XX века. А.Н. Колмогоровым были получены фундаментальные результаты во многих областях математики, в том числе в теории сложности алгоритмов и теории информации. В частности, ему принадлежит ключевая роль в превращении теории информации, сформулированной Клодом Шенноном как технической дисциплины, в строгую математическую науку, и в построении теории информации на принципиально иной, отличной от шенноновской, основе. В своих работах по теории информации и в области теории динамических систем А.Н. Колмогоров [27] обобщил понятие энтропии на эргодические случайные процессы через предельное распределение вероятностей.

Чтобы понять смысл этого обобщения, напомним некоторые определения из теории случайных процессов [8]. Пусть  $X(t)$  — случайный процесс, характеризующий функционирование некоторой технической или экономической системы, где  $t$  — время. Согласно определению случайного процесса, любое его сечение, т.е. значение  $X(t)$  для произвольного допустимого значения времени  $t$ , представляет собой соответствующую случайную величину, заданную своим законом распределения: рядом распределения в дискретном случае или плотностью распределения вероятностей в непрерывном случае.

*Реализацией* случайного процесса  $X(t)$  называют неслучайную функцию  $x(t)$  времени  $t$ , в которую обращается случайный процесс  $X(t)$  при наступлении конкретного события в результате од-

нократного проведения рассматриваемого испытания. *Выборкой объема  $n$*  из данной реализации называют некий конечный фрагмент данной реализации, т.е. конечную последовательность значений  $x(t)$ , полученных путем применения к исходной реализации определенного правила отбора значений:  $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_i), \dots, x(t_n)$ .



**Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987)**

Стационарный случайный процесс называют эргодическим случайным процессом, если среднее  $\mathbf{M} \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x(t_i) \right)$  по времени от значений элементов выборки случайного процесса стремится к среднему значению исходной реализации  $x(t)$ . Итак, если множество возможных значений параметра  $t$  совпадает с положительной полуосью  $t \in [0; +\infty)$ , то для всех реализаций эргодического случайного процесса справедливо равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) dt = \text{const.}$$

Зададим в пространстве параметра  $x$  эpsilon-сеть, т.е. такое множество точек, что  $\epsilon$ -ячейки, представляющие собой кубы с ребром  $\epsilon$ , полностью покрывают это пространство. Пусть время  $t$  из-

меняется дискретно так, что  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = t_0 + dt = dt$ ,  $t_2 = t_0 + 2 \cdot dt = 2 \cdot dt$ , ...,  $t_i = t_0 + i \cdot dt = i \cdot dt$ , ...,  $t_n = t_0 + n \cdot dt = n \cdot dt$ . Пусть теперь  $f(x_i(t_n))$  — вероятность выборки  $x_i(t_n)$ , т.е. совместная вероятность того, что в момент времени  $t_0 = 0$  броуновская частица находилась в  $\varepsilon$ -ячейке с номером 0, в момент времени  $t_1 = dt$  — в  $\varepsilon$ -ячейке с номером 1, в момент времени  $t_2 = 2 \cdot dt$  — в  $\varepsilon$ -ячейке с номером 2, ..., в момент времени  $t_i = i \cdot dt$  — в  $\varepsilon$ -ячейке с номером  $i$ , ..., в момент времени  $t_n = n \cdot dt$  — в  $\varepsilon$ -ячейке с номером  $n$ . Тогда мера априорной неполноты информации о положении броуновской частицы задается формулой

$$K(n) = - \sum_{i=1}^n f(x_i(t_n)) \cdot \ln(x_i(t_n)). \quad (1.12)$$

Согласно формуле (1.12) справедливо равенство

$$K(n+1) = - \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i(t_{n+1})) \cdot \ln(x_i(t_{n+1})).$$

Разность энтропий  $K(n+1) - K(n)$  есть потерянная информация о положении частицы на временном интервале длительности  $dt$ . Скорость потери информации на всем временном интервале длительностью  $n \cdot dt$  равна  $\frac{K(n) - K(0)}{n \cdot dt}$ . Энтропия Колмогорова определяется как предельное значение этой оценки при заданном начальном значении  $K(0) = 0$ :

$$K = \lim_{dt \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K(n)}{n \cdot dt}. \quad (1.13)$$

Таким образом, значение энтропии Колмогорова ( $K$ -энтропии) задает оценку скорости потери информации и может интерпретироваться как мера «памяти» системы, или мера скорости «забывания» начальных условий [28]. Ее можно также рассматривать как меру хаотичности системы. Так, для хаотичного процесса прошлые значения  $x_i$  никак не связаны и не несут никакой информации о настоящем и будущем (даже ближайшем) в значениях  $x$ . В этом случае все значения  $x_i$  являются равновероятными и  $f(x_i) = \frac{1}{n}$ , откуда  $K(n) = \ln n$ . Подставляя это значение в (1.13) и учитывая, что при предельном переходе  $n \cdot dt = \text{const}$ , получаем, что для процесса «без памяти»  $K \rightarrow \infty$ . Аналогично можно показать, что в случае ре-

гулярного движения, когда  $K \rightarrow 0$ , можно точно предсказать любые будущие значения  $x(t)$ . Таким образом, чем меньше  $K$ , тем более детерминированной является система. Напротив, большие значения  $K$  свидетельствуют о высокой стохастичности системы, короткой «памяти» и, соответственно, плохой прогнозируемости ее будущих состояний. Роль  $K$ -энтропии для нелинейных систем похожа на роль, которую играет автокорреляционная функция для линейных систем.  $K$ -энтропия обладает и другими интересными свойствами. В частности, энтропия Колмогорова связана с показателями Ляпунова, характеризующими устойчивость динамической системы.

### 1.8. ЭНТРОПИЯ РЕНЬИ

Альфред Реньи ввел *однопараметрический спектр энтропий Реньи*. **Альфред Реньи** (1921–1970) — венгерский математик, создатель Математического института в Будапеште, ныне носящего его имя. С одной стороны, энтропия Реньи представляет собой обобщение энтропии Шеннона. А с другой стороны, одновременно с этим она представляет собой обобщение расстояния (расхождения) Кульбака – Лейблера [108]. Отметим также, что именно Реньи принадлежит полное доказательство теоремы Хартли о необходимом количестве информации.



**Альфред Реньи (1921–1970)**



*Расстояние Кульбака – Лейблера (информационная дивергенция, относительная энтропия)* – это несимметричная мера удаленности друг от друга двух вероятностных распределений. Обычно одно из сравниваемых распределений является «истинным» распределением, а второе распределение – предполагаемым (проверяемым) распределением, являющимся приближением первого.

Пусть  $X, Y$  – конечные дискретные случайные величины, для которых области возможных значений принадлежат заданному множеству и известны функции вероятности:  $P(X = a_i) = p_i$  и  $P(Y = a_i) = q_i$ . Тогда значение  $D_{KL}$  расстояния Кульбака – Лейблера вычисляется по формулам

$$D_{KL}(X, Y) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \ln \frac{p_i}{q_i}, \quad D_{KL}(Y, X) = \sum_{i=1}^n q_i \cdot \ln \frac{q_i}{p_i}. \quad (1.14)$$

В случае абсолютно непрерывных случайных величин  $X, Y$ , заданных своими плотностями  $f_x(x), f_y(x)$  распределения, значение расстояния Кульбака – Лейблера вычисляется по формулам

$$D_{KL}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) \cdot \ln \frac{f_x(x)}{f_y(x)} dx, \quad D_{KL}(Y, X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_y(x) \cdot \ln \frac{f_y(x)}{f_x(x)} dx.$$

Расстояние Кульбака – Лейблера всегда является неотрицательным числом, при этом оно равно нулю  $D_{KL}(X, Y) = 0$  тогда и только тогда, когда для заданных случайных величин почти всюду справедливо равенство  $X = Y$ .

В 1960 году Альфред Реньи предлагает свое обобщение энтропии [122]. *Энтропия Реньи* представляет собой семейство функционалов для количественного разнообразия случайности системы. Реньи определил свою энтропию как момент порядка  $\alpha$  меры  $\epsilon$ -разбиения (покрытия). Пусть  $\alpha$  – заданное действительное число, удовлетворяющее требованиям  $\alpha \geq 0, \alpha \neq 1$ . Тогда *энтропия Реньи порядка  $\alpha$*  определяется формулой

$$H_\alpha = H_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \ln \left( \sum_{i=1}^n p_i^\alpha \right), \quad (1.15)$$

где  $p_i = P(X = x_i)$  – вероятность события, состоящего в том, что дискретная случайная величина  $X$  окажется равна своему соответствующему возможному значению,  $n$  – общее число различных возможных значений случайной величины  $X$ . Для имеющегося

$\varepsilon$ -покрытия  $p_i = \frac{N_i}{N}$ , где  $N_i$  — число элементов системы, приходящихся на  $i$ -й элемент  $\varepsilon$ -разбиения,  $N = N(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n N_i$  — полное число элементов заданного  $\varepsilon$ -покрытия. Вообще говоря, Реньи использовал логарифм по основанию 2. Но основание логарифма всего лишь определяет единицу измерения.

Для равномерного распределения, когда  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$ , все энтропии Реньи равны  $H_\alpha(X) = \ln n$ . В противном случае значения энтропий Реньи слабо уменьшаются при возрастании значений параметра  $\alpha$ . Энтропии Реньи играют важную роль в экологии и статистике как индексы разнообразия. Энтропия Реньи также важна в квантовой информации, она может быть использована в качестве меры сложности.

Рассмотрим некоторые частные случаи энтропии Реньи для конкретных значений порядка  $\alpha$ :

1) *энтропия Хартли*:  $H_0 = H_0(X) = \ln n$ , где  $n$  — мощность области возможных значений конечной случайной величины  $X$ , т.е. количество различных элементов, принадлежащих множеству возможных значений;

2) *информационная энтропия Шеннона*:  $H_1 = H_1(X) = H_1(\mathbf{p}) = -\sum_{i=1}^n p_i \cdot \ln p_i$  (определяется как предел при  $\alpha \rightarrow 1$ , который не сложно найти, например, с помощью правила Лопиталья);

3) *корреляционная энтропия* или *столкновение энтропии*:  $H_2 = H_2(X) = -\ln\left(\sum_{i=1}^n p_i^2\right) = -\ln(X = Y)$ ;

4. *Min-энтропия*:  $H_\infty = H_\infty(X) = -\ln \max_i p_i$ .

Отметим, что для любого неотрицательного значения порядка ( $\alpha \geq 0$ ) всегда выполняются неравенства  $H_\infty(X) \leq H_\alpha(X)$ . Кроме того,  $H_2(X) \leq H_1(X)$  и  $H_\infty(X) \leq H_2(X) \leq 2 \cdot H_\infty(X)$ .

Альфред Реньи ввел не только свои абсолютные энтропии (1.15), он определил также спектр мер расхождений, обобщающих расхождения Кульбака – Лейблера. Пусть  $\alpha$  — заданное действительное число, удовлетворяющее требованиям  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$ . Тогда в обозначениях, использованных при определении значения  $D_{KL}$  расстояния Кульбака – Лейблера, значение расхождения Реньи порядка  $\alpha$  определяется формулами

$$D_\alpha(X, Y) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \ln \sum_{i=1}^n p_i^\alpha \cdot q_i^{1-\alpha}, \quad D_\alpha(Y, X) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \ln \sum_{i=1}^n p_i^{1-\alpha} \cdot q_i^\alpha.$$

Расхождение Реньи также называют *alpha-расхождением* или  *$\alpha$ -дивергенцией*. Сам Реньи использовал логарифм по основанию 2, но, как всегда, значение основания логарифма абсолютно неважно.

### 1.9. ЭНТРОПИЯ ТСАЛЛИСА

В 1988 году Константино Тсаллис (или Цаллис) предложил новое обобщение энтропии [129], являющееся удобным для применения с целью разработки теории нелинейной термодинамики. **Константино Тсаллис** (род. 1943) — бразильский физик греческого происхождения. Гипотеза Тсаллиса базируется на предположении, что сильное взаимодействие в термодинамически аномальной системе приводит к новым степеням свободы, к совершенно иной статистической физике небольшого типа. Предложенное им обобщение энтропии, возможно, в ближайшем будущем сможет сыграть существенную роль в теоретической физике и астрофизике. Отметим также, что наряду с энтропией Тсаллиса, рассматривают также семейство несимметричных мер расхождения (дивергенций) Тсаллиса между распределениями вероятностей с общим носителем.



**Константино Тсаллис (род. 1943)**

Энтропия Тсаллиса  $S_q$  (неэкстенсивная или неаддитивная энтропия) определяется для  $n$  микросостояний согласно следующей формуле:

$$S_q = S_q(\mathbf{X}) = S_q(\mathbf{p}) = K \cdot \frac{1 - \sum_{i=1}^n p_i^q}{q-1}, \left( \sum_{i=1}^n p_i = 1; \quad q \in \mathbf{R}; \quad K > 0 \right). \quad (1.16)$$

Здесь  $p_i$  определены так же, как и в формуле (1.15),  $K$  — размерная константа, если размерность играет важную роль для понимания задачи.

Тсаллис и его сторонники предлагают развивать «неэкстенсивную статистическую механику и термодинамику» в качестве обобщения этих классических дисциплин на случай систем с длинной памятью и/или дальнедействующими силами.

Перечислим основные свойства энтропии Тсаллиса.

1. Если  $q \rightarrow 1$ , то энтропия Тсаллиса обращается в энтропию Шеннона. Применим правило Лопиталя для раскрытия неопределенности

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} S_q &= K \cdot \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - \sum_{i=1}^n p_i \cdot p_i^{q-1}}{q-1} = K \cdot \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - \sum_{i=1}^n p_i \cdot e^{(q-1) \cdot \ln p_i}}{q-1} \approx \\ &\approx K \cdot \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - \sum_{i=1}^n p_i \cdot (1 + (q-1) \cdot \ln p_i)}{q-1} = \\ &= K \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left( 1 - \sum_{i=1}^n p_i \cdot (1 + t \cdot \ln p_i) \right)'_t}{(t)'_t} = -K \cdot \sum_{i=1}^n p_i \cdot \ln p_i = H(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

2. Если  $q > 1$ , для одного индекса  $p_i \approx 1$ , а для всех остальных индексов  $p_i \approx 0$  (система полностью детерминирована: заполнен только уровень  $l$ ), то  $S_q \approx 0$ .

3.  $S_q$  достигает экстремума (максимума, если  $q \geq 1$ , и минимума, если  $q < 1$ ) для равномерного распределения (т.е.  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$ ).

$$\text{Если } \hat{\mathbf{p}} = \underbrace{\left( \frac{1}{n}; \frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n} \right)}_n, \text{ то } \hat{S}_q = \max_{\mathbf{p}} S_q = S_q(\hat{\mathbf{p}}) = K \cdot \frac{n^{1-q} - 1}{1-q}.$$

Если  $q = 1$ , то  $\hat{S}_1 = \max_{\mathbf{p}} S_1 = S_1(\mathbf{p}) = K \cdot \ln n$ , т.е. имеем известную формулу Больцмана – Хартли – Шеннона для равномерных распределений.

4.  $S_q$  является вогнутой (выпуклой вверх) при  $q > 1$  и выпуклой (вниз) при  $q < 1$  (это свойство и определяет термодинамическую устойчивость).

5. Важнейшим свойством энтропии Тсаллиса является ее неаддитивность, кардинально отличающая ее практически от всех других энтропий. Если две случайные величины  $X$  и  $Y$  являются независимыми, то

$$S_q(X + Y) = S_q(X) + S_q(Y) + \frac{1-q}{K} S_q(X) \cdot S_q(Y).$$

Если  $q < 1$ , то говорят, что имеет место сверхэкстенсивный случай,  $q = 1$  – экстенсивный,  $q > 1$  – субэкстенсивный. Значение параметра  $\left| \frac{1-q}{K} \right|$  можно воспринимать как своеобразную меру отклонения энтропии Тсаллиса от аддитивности.

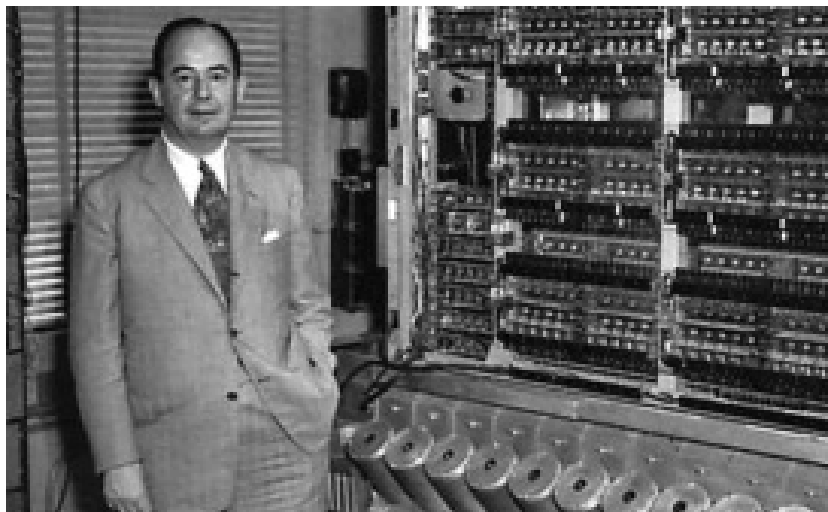
Как отмечалось выше, от всех энтропий, в том числе и от энтропии Реньи, энтропия Тсаллиса отличается тем, что не является аддитивной. Это принципиальное и важное отличие. Тсаллис и его сторонники считают, что эта особенность дает возможность построить новую термодинамику и новую статистическую теорию, которые способны просто и корректно описывать системы с длинной памятью и системы, в которых каждый элемент взаимодействует не только с ближайшими соседями, но и со всей системой в целом или ее крупными частями. Примером таких систем, а поэтому и возможным объектом исследований с помощью новой теории, являются космические гравитирующие системы: звездные скопления, туманности, галактики, скопления галактик и т.п.

Начиная с 1988 года, когда Константино Тсаллис предложил энтропию (1.16), появилось значительное число приложений термодинамики аномальных систем (с длиной памятью и/или с дальнедействующими силами), в том числе и в области термодинамики гравитирующих систем. С частью этих результатов можно ознакомиться в обзоре Тсаллиса [128]. Кроме того, на сайте <http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm> можно ознакомиться с постоянно обновляющейся библиографией по неэкстенсивной статистической механике и неэкстенсивной термодинамике.

Интересное исследование применения энтропии Тсаллиса для оценки сложности экономических систем, связи динамики показателя неэкстенсивности (неаддитивности)  $q$  и энтропии Тсаллиса  $S_q$ , а также их связи с динамикой исходного временного ряда и мультимасштабностью провели украинские ученые В.Н. Соловьев и А.А. Сердюк в своей работе [78].

### 1.10. КВАНТОВАЯ ЭНТРОПИЯ ФОН НЕЙМАНА

Энтропия фон Неймана [49] играет важную роль в квантовой физике и в астрофизических исследованиях. **Джон (Янош) фон Нейман** (1903–1957) — американский математик и физик венгерского происхождения. Джон фон Нейман внес значительный вклад в развитие таких отраслей науки, как квантовая физика, квантовая логика, функциональный анализ, теория множеств, информатика и экономика. Он являлся участником Манхэттенского проекта по разработке ядерного оружия, одним из создателей математической теории игр и концепции клеточных автоматов, а также основоположником современной архитектуры компьютеров. Джон фон Нейман широко известен как ученый, с именем которого связывают архитектуру большинства современных компьютеров (так называемая архитектура фон Неймана), применение теории операторов к квантовой механике (алгебра фон Неймана), а также как создатель теории игр и концепции клеточных автоматов.



**Джон (Янош) фон Нейман (1903–1957)**

Предварительно рассмотрим такие базовые понятия квантовой статистики, как оператор, квантовое состояние, волновая функция и обозначения бра-кет.

*Оператор* (в физике) — это математический символ для обозначения действия или программ действий, которые нужно совершить над некоторой функцией, чтобы однозначно получить другую функцию. В квантовой механике операторы действуют на волновую функцию и обозначаются большими латинскими буквами с циркумфлексом наверху. Например,  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ , ... Термин циркумфлекс образован от латинского *circumflexus* — «изогнутый вокруг». Циркумфлекс часто называют «домиком» или «крышечкой». В физических текстах знак оператора, т.е. циркумфлекс, теперь принято опускать, чтобы не загромождать формулу.

Оператор действует на функцию, которая стоит справа от него (говорят также, что он применяется к функции или умножается на функцию):  $\hat{A}\Psi_1 = \Psi_2$ . Очевидно, оператор представляет собой аналог квадратной матрицы.

*Квантовое состояние* — это любое возможное состояние, в котором может находиться квантовая система. Чистое квантовое состояние может быть описано волновой функцией (в волновой механике) или вектором состояния (в матричной механике). Оба эти описания математически эквивалентны.

*Волновая функция* или *пси-функция*  $\Psi$  — комплекснозначная функция, дающая наиболее полное описание состояния системы. *Комплекснозначная функция* — это функция  $f(x)$  действительного (вещественного) переменного  $x$ , принимающая комплексные значения:  $f(x) = u(x) + iv(x)$ , где  $u(x)$ ,  $v(x)$  — действительные (вещественные) функции действительного переменного  $x$ ,  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица, при этом  $u(x) = \text{Re } f(x)$  — вещественная часть функции  $f(x)$ ,  $v(x) = \text{Im } f(x)$  — мнимая часть функции  $f(x)$ . Для комплекснозначных функций, как и для обычных комплексных чисел, важную роль играет *операция комплексного сопряжения*, обозначаемая символом звездочки «\*»: если  $f(x) = u(x) + iv(x)$ , то  $f^*(x) = u(x) - iv(x)$ .

Волновая функция используется в квантовой механике для описания чистого состояния системы. Квантовые состояния можно интерпретировать как статистические ансамбли с некоторыми фиксированными квантовыми числами. Для описания квантового состояния системы вводится так называемый вектор состояния, представляющий собой множество математических величин, которое полностью описывает квантовую систему.

Принято считать, что волновая функция определена с точностью до произвольного ненулевого комплексного множителя, т.е. волновые функции  $\Psi$  и  $c \cdot \Psi$ , где  $c$  — произвольное ненулевое комплексное число, описывают одинаковые состояния квантовой системы.

Английский физик, лауреат Нобелевской премии по физике 1933 года, один из создателей квантовой механики Поль Адриен Морис Дирак (1902–1984) ввел удобные в квантовой механике обозначения *бра-кет*:  $|\psi\rangle$  — вектор состояния, соответствующий состоянию  $\psi$ ,  $\langle\psi|$  — сопряженный вектор, соответствующий состоянию  $\psi$ . Символ  $\langle\psi|$  называется *бра* (англ. *bra*), а символ  $|\psi\rangle$  — *кет* (англ. *ket*). Названия векторов образованы разбиением слова *bracket* (скобка) на две части: *bra* и *ket*.

Следует учитывать, что кет-вектор  $|\psi\rangle$  представляет собой матрицу-столбец, компонентами которого являются  $\psi$ , а бра-вектор  $\langle\psi|$  представляет собой матрицу-строку, компонентами которого являются  $\psi^*$ . Поэтому результатом действия оператора слева на кет-вектор является кет-вектор  $\hat{A}|\psi\rangle$ , а действия оператора справа на бра-вектор — бра-вектор  $\langle\psi|\hat{A}$ .

На пространстве волновых функций задается операция скалярного произведения. В математике скалярное произведение обычных векторов  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1; b_2; \dots; b_n)$  комплексного  $n$ -мерного пространства определяется следующей формулой:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i^*. \quad (1.17)$$

Компоненты одного из сомножителей комплексно сопрягаются для того, чтобы скалярный квадрат любого ненулевого вектора был действительным (вещественным) положительным числом:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot a_i^* = \sum_{i=1}^n (\operatorname{Re}^2 a_i + \operatorname{Im}^2 a_i).$$

Формулу (1.17) легко обобщить на случай, когда компоненты вектора нумеруются бесконечной дискретной переменной, и для непрерывного случая, для которого сумму необходимо заменять соответствующим интегралом. Наконец, в физике принято комплексно сопрягать компоненты первого аргумента скалярного произведения. При этом для обозначения скалярного произведения волновых функций вместо круглых скобок принято использовать



угловые скобки, а вместо запятой — черту. Все эти особенности обозначений сразу позволяют различить, какая именно традиция (математическая или физическая) используется.

Итак, далее будем считать, что скалярное произведение на пространстве волновых функций определяется формулой  $\langle \varphi | \psi \rangle = \int \varphi^*(x) \cdot \psi(x) dx$  в случае непрерывной переменной или  $\langle \varphi | \psi \rangle = \sum_i \varphi^*(i) \cdot \psi(i)$  в случае дискретной переменной. Так как умножение матрицы-строки на матрицу-столбец дает скалярное произведение соответствующих векторов, то произведение бра-вектора на кет-вектор дает скалярное произведение векторов, называемое брекето:  $\langle \varphi | | \psi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle$ , т.е. бра · кет = брекет.

Среднее значение  $\langle A \rangle = \bar{A}$  какой-либо физической величины  $A$ , которой соответствует оператор  $\hat{A}$ , в чистом состоянии определяется следующим образом:

$$\langle A \rangle = \bar{A} = \langle \psi | \hat{A} \psi \rangle = \langle \psi | | \hat{A} \psi(x) \rangle = \int \psi^*(x) \cdot \hat{A} \psi(x) dx.$$

Состояния квантовой системы, которые можно описать волновой функцией, называются *чистыми состояниями*. Вся классическая квантовая механика основана на применении таких чистых ансамблей.

*Смешанное состояние* (смесь состояний) — это состояние квантовомеханической системы, в котором не задан максимально полный набор независимых физических величин, определяющих состояние системы, а определены лишь вероятности  $p_1, p_2, \dots$   $\left( \sum_i p_i = 1 \right)$  нахождения системы в различных квантовых состояниях, описываемых волновыми функциями  $\Psi_1, \Psi_2, \dots$

Собственно, в конечном случае смешанное состояние системы означает, что система может с разными вероятностями находиться в одном из заданных  $n$  состояний (дискретный базис), каждое из которых описывается своей волновой функцией  $\Psi_i$ . Дискретный набор заданных состояний принято называть *дискретным базисом*. Среднее значение  $\langle A \rangle = \bar{A}$  какой-либо физической величины  $A$  в смешанном состоянии определяется следующим образом:

$$\langle A \rangle = \bar{A} = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \bar{A}_i = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \langle \psi_i | \hat{A} \psi_i \rangle, \quad (1.18)$$

где  $p_i$  — вес состояния  $\Psi_i$ ,  $p_i = \frac{N_i}{N}$ , при этом  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ , т.к.  $\sum_{i=1}^n N_i = N$ .

В отличие от чистого состояния, смешанное состояние не описывается одной волновой функцией, а описывается матрицей плотности. Таким образом, в общем случае квантовое состояние (смешанное) принципиально не может быть описано волновой функцией и должно быть описано *матрицей плотности*, являющейся неотрицательным самосопряженным оператором с единичным следом. В качестве стандартного обозначения для оператора плотности применяется символ  $\hat{\rho}$ .

Итак, оператором плотности вероятности, соответствующим чистому состоянию, является

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|, \text{ где } \langle\psi|\psi\rangle = 1,$$

а оператором плотности вероятности, соответствующим смешанному состоянию, является

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (1.19)$$

где  $\hat{\rho}$  — *матрица плотности вероятности* смешанного состояния или просто матрица плотности (по своей сути не матрица, а оператор),  $|\psi\rangle\langle\phi|$  — кет-бра произведение, которое представляет собой соответствующий оператор. Формулу (1.18) для среднего значения  $\langle A \rangle = \bar{A}$  физической величины  $A$  в этих обозначениях можно записать в виде:

$$\langle A \rangle = \bar{A} = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{A}),$$

где  $\text{Tr}(\mathbf{C}) = \text{Sp}(\mathbf{C}) = \sum_{i=1}^n c_{ii}$  — след (англ. *tract*, нем. *Spur*) квадратной матрицы  $\mathbf{C}$  порядка  $n$ .

Матрица плотности является фундаментальным понятием квантовой статистической физики. Она представляет собой *оператор плотности вероятности* состояний системы и описывает как замкнутые системы (чистые состояния), так и открытые системы (смешанные состояния), т.е. системы, взаимодействующие как со своими частями, так и с окружением. Формализм квантовой физики, основанный на матрице плотности, был предложен Джоном фон Нейманом и независимо от него советским физиком, лауреатом Нобелевской премии по физике 1962 года Львом Давидовичем Ландау (1908–1968) и швейцарским физиком, лауреатом Нобелевской

премии по физике 1952 года Феликсом Блохом (1905–1983). Необходимость такого подхода для описания квантовых систем была связана с тем, что формализм волновой функции описывает замкнутые системы, т.е. только чистые состояния. Пространство же состояний для матрицы плотности — это не только набор всех дискретных (базисных) состояний, это и все возможные корреляции между ними. Таким образом, матрица плотности в квантовой статистике играет в некотором смысле роль, подобную функции распределения Гиббса в классической статистической физике.

Оператор плотности — это неотрицательный самосопряженный оператор с единичным следом в пространстве состояний:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1.$$

Равенство следа единице соответствует единичной нормировке полной вероятности на данном пространстве состояний.

След квадрата матрицы плотности равен единице для чистых состояний и всегда меньше единицы для смешанных состояний, т.е.

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^2) \leq 1.$$

Очевидно, след квадрата матрицы плотности можно рассматривать в качестве *меры чистоты состояния* системы.

Энтропия, как известно, является важной характеристикой любой системы. Для случая квантовых систем в смешанных состояниях фон Нейман обобщил шенноновское определение энтропии (1.10), приняв в качестве вероятностной меры элементы матрицы плотности. В диагональном представлении энтропия фон Неймана может быть записана в виде:

$$S = S(\hat{\rho}) = -\sum_{i=1}^n \rho_i \cdot \ln \rho_i.$$

С учетом определения следа матрицы эту формулу можно записать в виде:

$$S = S(\hat{\rho}) = -\text{Tr}(\rho_i \cdot \ln \rho_i).$$

Так как для самосопряженных матриц от их диагонального представления всегда можно перейти к общему виду и обратно, то в общем виде *энтропия фон Неймана* обычно записывается без индексов и без циркумфлекса:

$$S = S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \cdot \ln \rho).$$

Эта функция обладает многими интересными свойствами. Часть этих свойств совпадает со свойствами энтропии Шеннона, которую энтропия фон Неймана обобщает. В частности, энтропия фон Неймана является выпуклой вверх функцией, обладает свойством неотрицательности  $S(\rho) \geq 0$  и свойством ограниченности  $S(\rho) \leq N$ , где  $N$  — размерность пространства, при этом равенство  $S(\rho) = 0$  выполняется только для чистых состояний, а равенство  $S(\rho) = N$  — только для максимально смешанных состояний.

Следует учитывать, что волновые функции по своей природе не локальны, и расстояние между частями системы, описываемой этими функциями, существенной роли не играет. Рассмотрим квантовую систему в смешанном состоянии, описываемом матрицей плотности (1.19). Такая система разными своими частями может одновременно находиться в разных точках обычного пространства. Причем расстояние между этими точками пространства в принципе может быть любым. Таким образом, воздействуя на одну часть системы, можно менять значения вероятностей ее состояний и тем самым мгновенно менять распределение вероятностей в других ее частях, находящихся, в том числе, и в произвольно удаленных местах. Этот чисто квантовый эффект нелокальности получил название квантовой телепортации.

Эффект квантовой нелокальности широко обсуждался в первой половине прошлого века в связи с формулировкой парадокса Эйнштейна – Подольского – Розена. Эти физики полагали, что эффект нелокальности не имеет никакого отношения к реальности и является недостатком (неполнотой, неадекватностью) математического аппарата квантовой механики.

Однако развитие теории и многочисленные эксперименты, проводимые начиная с 1997 года, показали, что нелокальность является реальным квантовым эффектом. К настоящему времени обсуждаются различные возможные приложения этого эффекта, например в связи с разработкой квантовых компьютеров. Эффекты квантовой нелокальности играют определенную роль в астрофизике, в том числе в космологии и в физике черных дыр.

Энтропия фон Неймана, как всякая энтропия, связана с информацией: в данном случае — с информацией о квантовой системе, описываемой матрицей плотности (1.19). И в этом плане она играет роль фундаментального параметра, количественно характеризующего состояние и направление эволюции квантовой системы.

В настоящее время энтропия фон Неймана широко используется в различных формах (условная энтропия, относительная энтропия и т.д.) в рамках квантовой теории информации. Различные меры

запутанности непосредственно связаны с энтропией фон Неймана. Тем не менее, в последнее время появился ряд работ, посвященных критике энтропии Шеннона как меры информации и возможной ее неадекватности, и, следовательно, неадекватности энтропии фон Неймана как обобщения энтропии Шеннона.

### **1.11. СУЩНОСТЬ ЭНТРОПИИ И ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ЭНТРОПИЙНОГО ПОДХОДА**

Проведенный обзор (к сожалению, беглый, а порой и недостаточно математически строгий) эволюции научных взглядов на понятие энтропии позволяет дать ответы на важные вопросы, связанные с истинной сущностью энтропии и перспективами применения энтропийного подхода в научных и практических исследованиях, в том числе в экономических исследованиях.

**Первый вопрос:** имеют ли между собой многочисленные разновидности энтропии, как рассмотренные выше, так и не рассмотренные в этой главе, что-нибудь общее кроме одинакового названия?

Этот вопрос возникает естественным образом, если принять во внимание то разнообразие, которое характеризует существующие различные представления об энтропии. На сегодня научное сообщество не выработало единого, признанного всеми ответа на этот вопрос: одни ученые отвечают на этот вопрос утвердительно, другие — отрицательно, третьи — относятся к общности энтропий различных видов с заметной долей сомнения...

Клаузиус, по-видимому, был первым ученым, убежденным в универсальном характере энтропии и полагавшим, что во всех процессах, происходящих во Вселенной, она играет важную роль, в частности, определяя их направление развития во времени. Кстати, именно Рудольфу Клаузиусу принадлежит одна из формулировок второго начала термодинамики: *«Невозможен процесс, единственным результатом которого являлась бы передача тепла от более холодного тела к более горячему»*. Эту формулировку второго начала термодинамики называют постулатом Клаузиуса, а необратимый процесс, о котором идет речь в этом постулате, — процессом Клаузиуса.

Со времени открытия второго начала термодинамики необратимые процессы играли уникальную роль в физической картине мира. Так, знаменитая статья 1849 года Уильяма Томпсона, в которой приведена одна из первых формулировок второго начала термодинамики, называлась «Об универсальной тенденции в природе

к диссипации механической энергии». Отметим также, что и Клаузиус был вынужден использовать космологический язык: «Энтропия Вселенной стремится к максимуму» [57, с. 93].

К аналогичным выводам пришел Илья Пригожин [57]. **Илья Романович Пригожин (1917–2003)** – бельгийско-американский физик и химик российского происхождения, лауреат Нобелевской премии по химии 1977 года.



**Илья Романович Пригожин (1917–2003)**

Пригожин полагает, что принцип энтропии ответственен за необратимость времени во Вселенной и, возможно, играет важную роль в понимании смысла времени как физического феномена. Имеется множество различных обобщений энтропии на случай неравновесных сред. Это целая обширная область исследований, по которой существует разнообразная литература: Р. Балеску [1, 2], Ю.Л. Климонтович [24–26], И. Пригожин [56, 57], П. Резибуа и Де Ленер [59], Г. Хакен [87], В. Эбелинг [95] и многие др.

К настоящему времени выполнено множество исследований и обобщений энтропии, в том числе и с точки зрения строгой математической теории. Однако заметная активность математиков в этой области пока не востребована в приложениях, за исключением, пожалуй, работ Колмогорова, Реньи и Тсаллиса. Математическая теория энтропии достаточно глубоко изложена в книге Н. Мартина, Дж. Ингланда [42]. Хотелось бы еще отметить сле-

дующие работы, посвященные изучению энтропии и отдельных сторон ее применения: А.Дж. Вильсон [11], А.Н. Панченков [52, 53], И.В. Прангишвили, Ф.Ф. Пащенко, Б.П. Бусыгин [54], О.В. Чумак [90], П. Шамбадаль [91].

Несомненно, энтропия — это всегда мера (степень) хаоса, беспорядка. Именно разнообразие проявления феномена хаотичности и беспорядка обуславливает неизбежность разнообразия модификаций энтропии.

**Второй вопрос:** можно ли признать сферу применения энтропийного подхода обширной или все приложения энтропии и второго начала термодинамики ограничиваются самой термодинамикой и смежными направлениями физической науки?

История научного изучения энтропии свидетельствует, что энтропия — это научное явление, открытое в термодинамике, а затем успешно перекочевавшее в другие науки и прежде всего в теорию информации. Несомненно, энтропия играет важную роль практически во всех областях современного естествознания: в теплофизике, в статистической физике, в физической и химической кинетике, в биофизике, астрофизике, космологии и теории информации.

Говоря о прикладной математике, нельзя не упомянуть приложения принципа максимума энтропии. Хороший обзор применения различных вариационных принципов максимальности производства энтропии в физике, геофизике, биологии и других областях выполнен в монографии Л.М. Мартюшева, В.Д. Селезнева [43].

Как уже отмечалось, важными областями применения энтропии являются квантово-механические и релятивистские объекты. В квантовой физике и астрофизике такие применения энтропии представляют собой большой интерес. Упомянем лишь один оригинальный результат термодинамики черных дыр [88]: энтропия черной дыры равна четверти площади ее поверхности (площади горизонта событий). В космологии считается, что энтропия Вселенной равна числу квантов реликтового излучения, приходящихся на один нуклон [20].

**Третий вопрос:** возможно ли применение термодинамического подхода и теории энтропии в экономических исследованиях?

Динамично развивающимся разделом современной экономической науки является эконофизика. Сущность эконофизики, ее подходов и возможностей ее применения практически в полной мере раскрывают следующие работы: М.Д. Аптекарь, С.К. Рамазанов, В.Ю. Припотень, М.А. Руденко [22], В.Д. Дербенцев, А.А. Сердюк, В.Н. Соловьев, А.Д. Шарапов [77], Дж. Николис [51], И.В. Прангишвили [55], М.Ю. Романовский, Ю.М. Романовский

[61]. Непосредственным применением принципов термодинамики и теории энтропии в экономике занимается такая экономическая теория, как упомянутая выше термоэкономика. Возможности, которые предоставляет термоэкономический анализ для определения эффективности и оптимизации энергопреобразующих систем, достаточно подробно рассмотрены в монографии Дж. Тсатсарониса [83]. Считается, что термоэкономика — это комплексная дисциплина, объединяющая первое начало термодинамики и экономическую теорию. Но в первую очередь термоэкономика является технической дисциплиной, которая может быть объектом или инструментом исследований, прежде всего для инженеров.

Развитие термоэкономики привело к созданию в 1982 году эксергоэкономики, объединившей второй закон термодинамики (точнее, эксергетический анализ) и экономическую теорию. Первым в мировой литературе обобщающим трудом, посвященным понятию эксергии и применениям ее в технике, включая экономические приложения эксергии в энергетике, является книга Я. Шаргута, Р. Петелы [92]. В монографии В.М. Бродянского, В. Фратшера и К. Михалека [7] изложены результаты совместных исследований специалистов СССР и ГДР в области эксергетического метода и его приложений к техническим и технико-экономическим задачам.

**Четвертый вопрос:** возможно ли корректное применение теории энтропии при моделировании процессов принятия управленческих решений в экономике?

Собственно, главной целью монографии и является обоснование позитивного ответа на последний вопрос. В следующих главах монографии будут рассмотрены конкретные примеры применения энтропийного подхода при моделировании процессов принятия управленческих решений в экономике. При этом, как правило, применение энтропии позволяет качественнее учитывать хаотичность, случайность, сложность, противоречивость, неопределенность, неполноту информации, конфликтность, многокритериальность, альтернативность и обусловленный ими экономический риск. Однако всегда следует помнить, что механический перенос принципов термодинамики и теории энтропии в экономику и теорию принятия управленческих решений абсолютно недопустим.

В последнее время все больше исследований посвящено не столько вопросам теории энтропии, сколько изучению самых разнообразных практических аспектов энтропийного подхода. Так, физики Рам Авинер, Мика Корнрайх и Рой Бек из Тель-Авивского университета разработали метод, с помощью которого можно быстро и точно оценить энтропию системы, не прибегая к дополни-



тельным соображениям [100]. Для этого исследователи отображали систему в одномерную строку, рассчитывали степень, до которой ее можно сжать без потерь, и отображали полученное значение в энтропию. На пяти модельных примерах, в которых энтропию можно рассчитать точно, погрешность алгоритма не превышала нескольких процентов. Кроме того, ученые показали, что с помощью предложенного алгоритма можно решать задачу фолдинга белков. Здесь важно отметить, что для понимания основных термодинамических свойств системы необходимо знать две функции: энтропию и энтальпию системы. Если энтропия измеряет упорядоченность элементов системы, то энтальпия измеряет энергию, которая необходима для поддержания ее структуры. Чтобы оценить энтальпию, достаточно знать силу взаимодействия между компонентами системы, поэтому с вычислением этой функции обычно проблем не возникает. В то же время, для вычисления энтропии необходимо найти вероятности, с которыми реализуются все возможные микросостояния системы (например, различные способы сворачивания белка). С увеличением размера системы сложность этой задачи быстро растет, и для больших систем ее не могут решить даже современные суперкомпьютеры.

Как известно, история науки — это сама наука. Эта глава позволяет ознакомиться не только с эволюцией взглядов на понятие энтропии, но и с основными понятиями теории энтропии, с многообразием применения энтропии во многих разделах теоретической и экспериментальной физики.

## Глава 2

# ПРИМЕНЕНИЕ ЭНТРОПИИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ НА ФИНАНСОВЫХ РЫНКАХ

XXI век ознаменовался стремительным развитием финансовых рынков. Однако мировая теория и практика до настоящего времени не выработала однозначных подходов к определению как существенных характеристик таких социально-экономических систем, так и способов определения адекватности инструментария для анализа, моделирования и прогнозирования поведения этих институтов.

Изменение курсовой стоимости финансовых инструментов, несомненно, образует временной ряд. *Временной ряд* или *ряд динамики* — собранный в разные моменты времени статистический материал о значениях каких-либо параметров исследуемого процесса. *Анализ временных рядов* — совокупность математических методов, предназначенных для выявления структуры временных рядов, их идентификации и прогнозирования. Остановимся несколько подробнее на задаче идентификации временных рядов.

Задача идентификации временных рядов состоит в выявлении параметров системы, в которой протекает процесс, характеризуемый данным временным рядом. К основным параметрам системы относят такие показатели, как размерность пространства вложения, корреляционная размерность и энтропия. Сразу отметим, что при анализе временных рядов энтропия характеризует предсказуемость (ее возможность, корректность и качество) значений временного ряда и поведения системы.

При анализе временных рядов под размерностью пространства вложения обычно понимают минимальное число динамических переменных, однозначно определяющих анализируемый процесс, характеризуемый данным временным рядом. Математика и физика выработали несколько различных подходов к определению понятия размерности: размерность векторного пространства (всегда является натуральным числом); комбинаторная размерность множества (может быть любым неотрицательным числом); размерность Лебега или топологическая размерность (всегда является целым неотрицательным числом); размерность Хаусдорфа (может быть любым неотрицательным числом), еще называемая размерностью

Хаусдорфа – Безиковича, метрической размерностью или фрактальной размерностью; размерность Минковского (может быть любым неотрицательным числом).

Корреляционная размерность является важной количественной характеристикой самоподобия многомерных множеств. Корреляционная размерность является оценкой фрактальной размерности аттрактора системы и частным случаем обобщенной вероятностной размерности. *Аттрактор* (от англ. *attract* – привлекать, притягивать) – множество состояний (точнее, множество точек фазового пространства) динамической системы, к которому она стремится с течением времени. Наиболее простыми вариантами аттрактора являются притягивающая неподвижная точка и периодическая траектория. Аттрактор является центральным понятием теории хаоса.

*Теория хаоса* – это математический аппарат, описывающий поведение некоторых нелинейных динамических систем, подверженных при определенных условиях явлению, известному как хаос. Поведение такой системы кажется случайным. Отметим, что теория хаоса – это область исследований, связывающая математику и физику. Пионерами теории хаоса являются французский математик, механик, физик и философ Жюль Анри Пуанкаре (1854–1912), советские математики Андрей Николаевич Колмогоров и Владимир Игоревич Арнольд (1937–2010) и немецко-американо-швейцарский математик Юрген Курт Мозер (1928–1999). Для детального знакомства с теорией хаоса можно порекомендовать следующую литературу: Ю.Л. Климонтович [26], Г.Г. Малинецкий [38, 39], М. Шредер [94].

Большинство типов движения описывается простыми аттракторами, являющимися ограниченными циклами. Хаотические движения описывается странными аттракторами [80], которые очень сложны и имеют много параметров. *Странный аттрактор* – это аттрактор, имеющий два существенных отличия от обычного аттрактора: странный аттрактор характеризуется непериодической (незамкнутой) траекторией и неустойчивым режимом функционирования (малые отклонения от режима нарастают). Основным критерием хаотичности аттрактора является экспоненциальное нарастание во времени малых возмущений.

Значение корреляционной размерности аттрактора динамической системы несет информацию о степени сложности ее поведения. Особое значение корреляционной размерности для нелинейной динамики состоит в том, что для ее вычисления имеется относительно простой и эффективный алгоритм Грассбергера – Прокачиа. Следует отметить, что существует общий алгоритм

вычисления фрактальной размерности, основанный на бокс-алгоритме и энтропии Реньи, который является, с одной стороны, более сложным, чем алгоритм Грассбергера – Прокаччиа, а с другой стороны, более универсальным и сразу позволяет рассчитывать весь спектр размерностей, что важно в случае мультифрактальных объектов.

*Фрактал* (от лат. *fractus* — дробленный, сломанный, разбитый) — геометрическая фигура, обладающая свойством самоподобия, т.е. составленная из нескольких частей, каждая из которых подобна всей фигуре целиком. В математике под фракталами понимают множества точек в евклидовом пространстве, имеющие дробную метрическую размерность (в смысле Минковского или Хаусдорфа), либо метрическую размерность, отличную от топологической размерности. Первые примеры самоподобных множеств с необычными свойствами появились в XIX веке. Термин «фрактал» был введен Бенуа Мандельбротом в 1975 году и получил широкую популярность с выходом в 1977 году его книги [40], при этом сама фрактальная геометрия стала классической теорией хаоса. Бенуа Б. Мандельброт (1924–2010) — французский и американский математик польского происхождения, известный разработкой «теории шероховатостей» в природе и фрактальной геометрии. В последнее время набирает популярность новое направление анализа валютного и фондового рынка, называемое фрактальным анализом рынков, родоначальниками которого являются Бенуа Б. Мандельброт и Ричард Л. Хадсон [39].

*Мультифрактал* — комплексный фрактал, который может детерминироваться не одним-единственным алгоритмом построения, а несколькими последовательно сменяющимися друг друга алгоритмами. Интересно, что мультифракталы можно использовать для моделирования поведения цены на товарных и финансовых рынках [110].

Задача прогнозирования временного ряда состоит в экстраполяции будущих значений временного ряда, т.е. в предсказании (оценке) значений элементов временного ряда на некоторый промежуток времени вперед.

Целью прогноза будущих значений экономических показателей, как правило, является уменьшение того уровня риска, в пределах которого участник рынка должен принимать решения. Эта цель диктует два основных правила, которым должен следовать процесс прогнозирования:

1) прогнозирование должно быть математически корректным и должно порождать прогнозы, достаточно точные для того, чтобы отвечать нуждам участника рынка;

2) процедура прогнозирования и ее результаты должны быть достаточно эффективно представлены, что обеспечит адекватное использование прогнозов в процессе принятия решений участниками рынка.

Применение энтропии в качестве общепризнанной меры неполноты информации системы позволяет не только детальнее понять специфические особенности той или иной характеристики системы, но и оценить адекватность инструментария, используемого в прогнозном моделировании исследуемой системы. Но современная наука предлагает несколько видов энтропий и, соответственно, несколько способов их расчета. Однако использовать энтропию для анализа и прогнозирования поведения социально-экономических систем нужно корректно.

Так, в [63] используются энтропии Шеннона и Тсаллиса для анализа кризисных явлений на валютном рынке. Однако в соответствии с исследованиями в [47] для выборов, которые анализировал Я.А.Д. Саттам, некорректно использовать указанный инструментарий. Был проведен анализ еще 12 авторефератов [3, 5, 10, 15, 17, 21, 44, 45, 62, 85, 96, 97] диссертаций, в которых использовалась в качестве инструментария энтропия. В этих работах также имеет место неадекватность использования энтропии в качестве инструментария для проведения анализа предмета исследования.

## **2.1. ЭНТРОПИЯ ГРАССБЕРГЕРА — ПРОКАЧЧИА И ПОКАЗАТЕЛЬ ТЕКУЩЕЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ РЫНКА**

По мнению В.А. Мухамедова [47], в отличие от энтропии Шеннона, которая для получения адекватных результатов расчетов требует большого количества исходной информации (сотни тысяч членов временных рядов), энтропия Грассбергера – Прокаччия [105, 119] (ЭГП) для своих расчетов требует гораздо меньшего количества исходной информации.

Рассмотрим строгое определение понятия корреляционной размерности аттрактора. Введем обозначения:  $N$  – общее количество членов временного ряда,  $x(i)$  –  $i$ -й член временного ряда,  $\varepsilon$  – *пороговое расстояние*, т.е. заданное положительное число, равное размеру ячейки разбиения фазового пространства. Пусть фазовая траектория многомерной динамической системы лежит на некотором аттракторе и возвращается в любую сколь угодно малую

окрестность произвольной точки этого аттрактора. Тогда значение *корреляционной суммы* вычисляется как нормированное на  $N^2$  количество пар точек, расстояние между которыми меньше  $\varepsilon$ :

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \theta(\varepsilon - d(x(i), x(j))),$$

где  $d(x(i), x(j)) = \|x(i) - x(j)\|$  — расстояние (например, евклидова норма) между соответствующими членами временного ряда,  $\theta(z)$  — ступенчатая функция Хевисайда, называемая еще единичной ступенчатой функцией, функцией единичного скачка, включенной единицей. *Ступенчатая функция Хевисайда* — это кусочно-постоянная функция, равная нулю для отрицательных значений аргумента и единице — для положительных. В нуле эта функция, вообще говоря, не определена, однако ее обычно доопределяют в этой точке некоторым значением, чтобы область определения функции содержала все точки действительной оси. Чаще всего неважно, какое значение функция принимает в нуле, поэтому могут использоваться различные определения функции Хевисайда, удобные по тем или иным соображениям. Будем считать, что ступенчатая функция Хевисайда равна

$$\theta(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1, & z \geq 0. \end{cases}$$

Приведем равносильное и более наглядное определение корреляционной суммы. Воспользуемся функцией, называемой в конкретной математике нотацией Айверсона [65, с. 193]: пусть  $P(x)$  — некоторое условие (утверждение),  $[P(x)]$  — *нотация Айверсона*, тогда значение  $[P(x)]$  определяется следующим образом:

$$[P(x)] = \begin{cases} 0, & \text{если } P(x) \text{ ложно,} \\ 1, & \text{если } P(x) \text{ истинно.} \end{cases}$$

Очевидно, справедливо равенство

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N [d(x(i), x(j)) \leq \varepsilon].$$

При достаточно больших значениях  $N$  корреляционная сумма имеет следующий вероятностный смысл:  $C(\epsilon) \approx \sum_{k=1}^{m(\epsilon)} p_k^2$ , где  $m(\epsilon)$  — общее число ячеек, образующих разбиение (покрытие) фазового пространства,  $p_k$  — вероятность того, что одна точка аттрактора попадет в  $k$ -й элемент покрытия, т.е.  $k$ -ю ячейку разбиения,  $p_k^2$  — вероятность того, что пара точек аттрактора попадет в  $k$ -ю ячейку при условии независимости их попадания в ячейки.

При уменьшении  $\epsilon$  значение корреляционного интеграла будет убывать, и можно предположить, что это будет происходить по степенному закону:

$$C(\epsilon) \approx \epsilon^{D_C},$$

или, что эквивалентно, существует предел

$$D_C = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln C(\epsilon)}{\ln \epsilon},$$

значение  $D_C$  которого и есть корреляционная размерность. Отметим также, что предел  $\lim_{N \rightarrow \infty} C(\epsilon)$  называют *корреляционным интегралом*.

Вычислить значение  $D_C$  как указанный двойной предел технически сложно. Но геометрически значение корреляционной размерности определяется как тангенс угла наклона  $\ln C(\epsilon)$  к  $\ln \epsilon$ .

Вообще, для выявления структуры предельного множества используется семейство размерностей  $D_q$ , где  $q \geq 0$ , характеризующих статистическую структуру, т.е. некоторую степень неоднородности, этого множества. Это семейство размерностей  $D_q$  называют *обобщенной размерностью Реньи*:

$$D_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln I_q(\epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}},$$

где  $I_q(\epsilon) = \frac{1}{1-q} \cdot \sum_{k=1}^{m(\epsilon)} p_k^q$  — информация Реньи порядка  $q$  (ср. с формулой (1.15)). Частными случаями обобщенной размерности Реньи являются:

1.  $D_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln m(\epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}} = D_F$  — *фрактальная размерность Колмогорова – Хаусдорфа*, где  $m(\epsilon)$  — минимальное число ячеек, т.е. кубов

соответствующей размерности с ребром длиной  $\epsilon$ , необходимых для покрытия аттрактора.

$$2. \ln I_1(\epsilon) = - \sum_{k=1}^{m(\epsilon)} p_k \cdot \ln p_k = I(\epsilon), \text{ откуда } D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{- \sum_{k=1}^{m(\epsilon)} p_k \cdot \ln p_k}{\ln \frac{1}{\epsilon}} =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I(\epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}} = D_I - \text{информационная размерность (соответствующий}$$

предел при  $q \rightarrow 1$  может быть найден по правилу Лопиталья). Здесь  $I(\epsilon)$  – количество информации, необходимое для определения состояния системы в пределах точности  $\epsilon$ ,  $m(\epsilon)$  – число ячеек соответствующей размерности с ребром длиной  $\epsilon$ , покрывающих аттрактор,  $p_k$  – вероятность посещения фазовой траектории  $k$ -й ячейки.  $D_I$  характеризует скорость возрастания информации с уменьшением  $\epsilon$ . Если аттрактор является пространственно однородным, то справедливо равенство  $D_I = D_F$ , а если аттрактор является пространственно неоднородным, то справедливо строгое неравенство  $D_I < D_F$ .

$$3. D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln I_2(\epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{k=1}^{m(\epsilon)} p_k^2}{\ln \epsilon} = D_C - \text{корреляционная размер-$$

*ность.*

Обобщенные размерности Реньи  $D_q$  представляют собой невозрастающую функцию аргумента  $q$ : если  $q < p$ , то  $D_q \geq D_p$ . Равенство достигается только в случае, когда аттрактор является пространственно однородным. Для целых значений  $q$  размерность  $D_q$  имеет физический смысл. Диапазон значений размерностей  $D_q$  может рассматриваться как характеристика степени пространственной неоднородности аттрактора.

Как отмечалось выше, особое значение корреляционной размерности для нелинейной динамики состоит в том, что для ее вычисления имеется относительно простой и эффективный алгоритм Грассбергера – Прокаччия. Этот алгоритм был предложен в начале 80-х годов прошлого века известными учеными Петером Грассбергером и Итамаром Прокаччия. Петер Грассбергер (род. 1940) – австрийский физик, специалист по статистической физике и физике элементарных частиц. Наибольшую известность получил вклад Грассбергера в теорию хаоса, в которую он ввел понятие корреляционной размерности, средства измерения типа фрактальной раз-



мерности странного аттрактора. Итамар Прокаччия (род. 1949) — израильский физик, химик-теоретик.

Значение энтропии Грассбергера — Прокаччия рассчитывается по нижеследующему алгоритму [118]. Сначала необходимо задать значение порогового расстояния  $r$ , зафиксировать номер  $i$  члена временного ряда и найти частную корреляционную сумму  $C_i^m(r)$ , которая характеризует количество членов временного ряда, отличных от  $x(i)$  и находящихся от этого члена на расстоянии, не превышающем  $r$ :

$$C_i^m(r) = \frac{1}{N-m+1} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \theta(r-d(x(i), x(j))),$$

где  $m$  — длина выборки из анализируемого временного ряда

$$(1 \leq i \leq N-m+1).$$

Далее находится значение промежуточной величины  $\beta_m$ :

$$\beta_m = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln C^m(r)}{\ln r},$$

где

$$C^m(r) = \frac{1}{N-m+1} \cdot \sum_{i=1}^{N-m+1} C_i^m(r).$$

Далее находится значение промежуточной величины  $\Phi^m(r)$ :

$$\Phi^m(r) = \frac{1}{N-m+1} \cdot \sum_{i=1}^{N-m+1} \ln C_i^m(r),$$

$$E = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} (\Phi^m(r) - \Phi^{m+1}(r)). \quad (2.1)$$

Полученная согласно формуле (2.1) величина  $E$  и является значением энтропии Грассбергера — Прокаччия.

Одной из существенных характеристик финансовых рынков является волатильность, которая характеризует изменчивость временных рядов цен (и многих других количественных данных, представленных в виде числовых рядов, которые характеризуют такую социально-экономическую систему). Это важнейший па-

раметр финансовых рынков, который, являясь мерой неустойчивости рынка (мерой риска получения убытков от совершаемых операций), оказывает существенное влияние на изменение поведения, как трендов, так и самих участников рынка. Отсутствие учета волатильности существенно искажает результаты анализа рыночных процессов.

Однако для адекватного использования того или иного вида волатильности (подробнее о различных видах волатильности и их применении в анализе рыночных процессов см. [89]) необходимо определиться со специфическими особенностями такой характеристики финансовых рынков.

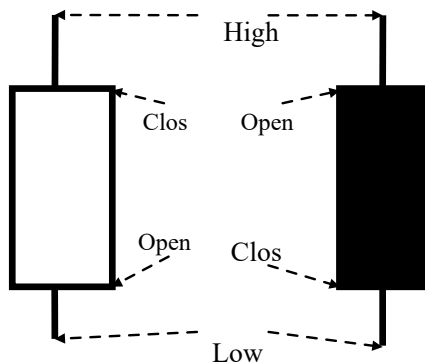
Рассмотрим текущую волатильность как одну из важных характеристик финансовых рынков. Подробнее о показателе текущей волатильности см. [19, 34, 36].

Современные международные рынки капиталов, как правило, в режиме реального времени поставляют участникам рынка текущие котировки, которые представлены четырехмерным вектором. Как правило, таким рядом являются поступающие на FOREX котировки в виде временного ряда из четырех цен, привязанных к временному интервалу  $\Delta t$  ( $\Delta t$  — периодичность поступления котировок на рынок):  $\vec{P}_i = (\text{Open}_i, \text{High}_i, \text{Low}_i, \text{Close}_i)$ , где  $\text{Open}$  — цена открытия анализируемого периода  $\Delta t$ ,  $\text{Close}$  — цена закрытия анализируемого периода  $\Delta t$ ,  $\text{High}$  — максимальная цена за анализируемый период  $\Delta t$ ,  $\text{Low}$  — минимальная цена за анализируемый период  $\Delta t$ .

За период  $\Delta t$  эти четыре цены образуют так называемую японскую свечу (о японских свечах подробнее см. [46]), которая представлена на рис. 2.1. Черный цвет «тела» свечи «говорит» о том, что за временной интервал  $\Delta t$  цена уменьшалась (поэтому цена  $\text{Open}$  находится выше на рис. 2.1, чем цена  $\text{Close}$ ).

Белый цвет «тела» свечи «говорит» о том, что за временной интервал  $\Delta t$  цена увеличивалась (поэтому цена  $\text{Close}$  находится выше на рис. 2.1, чем цена  $\text{Open}$ ).

Таким образом, японская свеча — это специфический графический образ, отражающий поведение цены на рынке, имеющий пять параметров, дающих информацию участникам рынка о динамике цены за временной интервал  $\Delta t$ :  $\text{Open}$ ,  $\text{High}$ ,  $\text{Low}$ ,  $\text{Close}$  и цвет свечи. Такое представление информации о текущем состоянии и динамике цены на финансовых рынках приводит к необходимости использования для анализа и прогнозирования поведения системы инструментария, адаптированного к четырехмерным рядам данных.

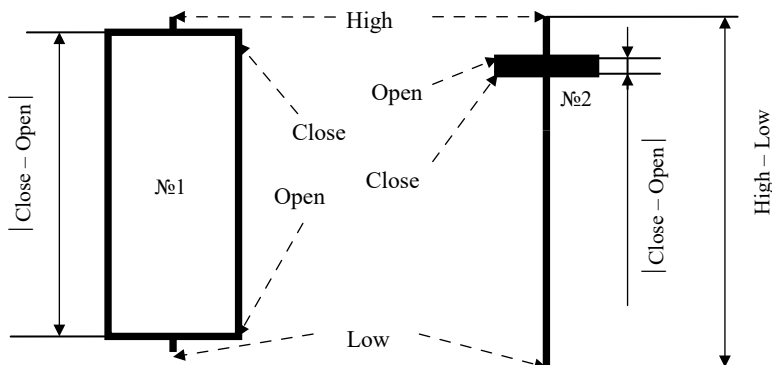


**Рис. 2.1.** Пример графического представления японских свечей

Значение показателя текущей волатильности  $VM$ , величина которого не учитывает «историю» динамики цены на рынке за продолжительный период времени, а отражает текущие настроения участников рынка и их мнения по поводу возможной будущей динамики цены, определяется по формуле:

$$VM = \frac{High - Low}{|Open - Close|} \geq 1. \quad (2.2)$$

Модуль в знаменателе формулы (2.2) учитывает возможность того, что  $Open$  может быть как больше, так и меньше  $Close$ . В числителе модуль отсутствует, так как всегда справедливо неравенство  $High \geq Low$  (см. рис. 2.2).



**Рис. 2.2.** Графическая интерпретация показателя  $VM$  с помощью японских свечей

В дальнейшем будем использовать именно формулу (2.2) для вычисления значения показателя  $VM$ .

Формула (2.2) определяет, во сколько раз высота «тела» свечи — в диапазоне цен  $Open \div Close$  — меньше высоты «теней» той же свечи — в диапазоне цен  $High \div Low$  (см. рис. 2.2).

В случае если знаменатель формулы (2.2) равен 0, применяется формула, являющаяся модификацией формулы (2.2):

$$VM = \frac{High - Low + \varepsilon}{\varepsilon}, \quad (2.3)$$

где  $\varepsilon$  — величина, меньшая на порядок, чем величины, участвующие в расчете. В нашем случае  $\varepsilon = 0,1$  котировочного пункта. Таким образом,  $\varepsilon$  меньше любого значения цены, участвующей в расчетах, в 10 раз.

Значения показателя  $VM$  в силу механизма его вычисления имеют ограничение снизу:  $VM \geq 1$ .

Формула (2.3) предназначена для свечей, у которых  $Open = Close$  (т.е. «тело» свечи в интервале  $Open \div Close$  имеет нулевую высоту), и позволяет различать, насколько значение  $VM$  отличается для свеч с различной геометрией «теней» (оставшаяся вне «тела» свечи часть). Так, например, «тело» свечи № 2 (см. рис. 2.2) имеет практически нулевую высоту. Свечи с таким «телом» появляются на экранах мониторов, как правило, когда мнения участников торгов о будущей динамике цены противоречивы и происходит либо смена текущего тренда, либо его коррекция. То есть уменьшение размеров «тела» текущей свечи при росте его «теней» (как это выглядит для свечи № 2 на рис. 2.2) подает сигнал участникам торгов о том, что текущий тренд снижает темп своего роста. Напротив, появление на экранах мониторов свечи, «тело» которой существенно больше «теней» (см. свечу № 1 на рис. 2.2), позволяет сделать вывод о том, что мнения участников торгов о будущей динамике цены достаточно единодушны и текущий тренд скорее всего будет продолжаться.

Социально-экономический смысл показателя  $VM$ , рассчитанного по формуле (2.2), заключается в том, что он показывает, насколько тренд, действующий в течение исследуемого периода  $\Delta t$ , становится рискованным (непредсказуемым) для продолжения работы в рынке. Свеча становится отличной от прямоугольника без «теней» (см. рис. 2.2) за счет сделок, цены по которым отличаются от общего тренда (в диапазоне цен  $Open \div Close$ ) в сторону  $High$  и  $Low$ , т.е. величина показателя  $VM$  показывает, насколько обще-

принятый тренд (в диапазоне цен Open ÷ Close) может отличаться от мнения любого участника рынка, работающего на анализируемом инвестиционно-временном горизонте, т.е. насколько мнение участников рынка, участвующих в формировании текущего тренда за период времени  $\Delta t$  (в диапазоне цен Open ÷ Close), может отличаться от мнений участников рынка, заключивших сделки по ценам, отклоняющимся в сторону High и Low. Анализируемый инвестиционно-временной горизонт (ИВГ) — горизонт, внутри которого работают участники торгов, чьи инвестиционные стратегии привязаны к промежутку времени  $\Delta t$ , называемому глубиной горизонта, через который им поступает информация о динамике цены на рынке.

Чем выше значение  $VM$ , тем значительно отличаются мнения участников рынка о соответствии текущей цены на исследуемый актив за период времени  $\Delta t$  текущему тренду. Как только значение показателя  $VM$  начинает существенно превышать 1, это означает, что общая длина «теней» существенно больше длины «тела» свечи. Как показали исследования, это происходит, когда на рынке — боковой или вяло текущий тренд, мнения участников рынка о будущей динамике цены разноречивы и следует ожидать существенного изменения текущего тренда — ослабления или разворота текущего тренда — т.е. повышения непредсказуемости поведения рынка. И, как следствие, рекомендуется закрыть все заключенные ранее сделки в направлении действующего тренда. При этом наилучшим временем для закрытия позиций (с точки зрения максимизации прибыли участника рынка) следует считать тот момент, когда значение показателя  $VM$  достигнет локального максимума.

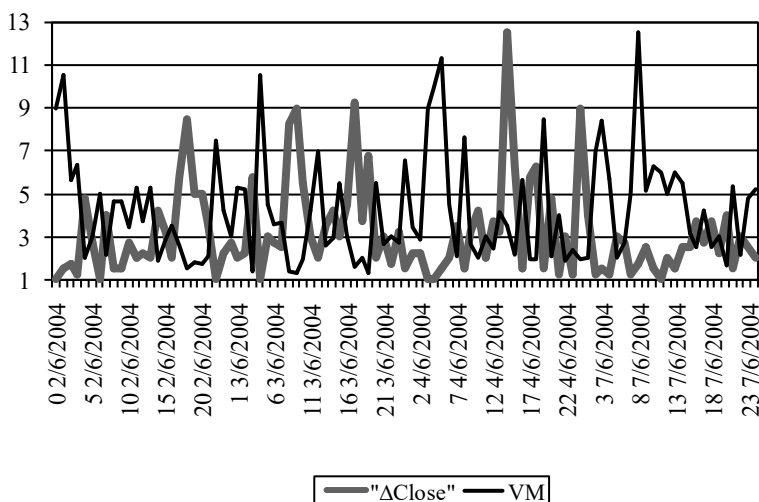
Показатель  $VM$  по способу расчета чем-то похож на показатель Херста (подробнее о показателе Херста см. [84]), который рассчитывается с использованием размаха колебаний значений анализируемого показателя в динамике исследуемого процесса. Существенные отличия заключаются в том, что при расчете показателя  $VM$  используется лишь один член временного вектор-ряда, да и предназначен показатель текущей волатильности для анализа систем, которые генерируют четырехмерные временные вектор-ряды.

Как видно, процесс вычисления значения энтропии Грассбергера — Прокаччия, в отличие от процесса вычисления показателя  $VM$ , достаточно непросто и требует привлечения сложного математического аппарата. Использование  $VM$  вместо  $E$  позволит снизить сложность расчетов и тем самым уменьшить погрешность вычислений.

Поэтому предлагается следующая гипотеза: показатель  $VM$ , рассчитанный по формуле (2.2), можно рассматривать как количественную меру предсказуемости (снижения неопределенности) динамики цены на финансовых рынках. Причем с увеличением значения  $VM$  уровень предсказуемости уменьшается.

Этот тезис наглядно подтверждается на рисунке 2.3, где представлены графики изменения  $VM$  и количественного показателя силы тренда  $|\Delta\text{Close}|$  за период с 00:00 02.06.2004 по 00:00 08.06.2004 для часового ИВГ валютной пары EUR/USD, где  $\Delta\text{Close} = \text{Close}_{\text{текущая}} - \text{Close}_{\text{текущая} - \Delta t}$  ( $\Delta\text{Close}$  рассматривается по модулю с множителем 2500 и увеличена на 1,0 для повышения наглядности рисунка),  $\Delta t = 1$  час. Очевидно, что с повышением значения  $|\Delta\text{Close}|$  уменьшается значение  $VM$ , и наоборот — с повышением значения показателя  $VM$  уменьшается значение  $|\Delta\text{Close}|$  (см. рис. 2.3).

На рис. 2.3 по оси абсцисс отложены даты и часы внутри суток, а по оси ординат — соответствующие значения показателя.



**Рис. 2.3.** Графики изменения  $VM$  и тренда  $|\Delta\text{Close}|$

Из графиков на рис. 2.3 можно сделать вывод, что показатель  $VM$ , как правило, по динамике своего значения противоположно направлен динамике действующего тренда. Чем сильнее тренд (чем больше величина  $|\Delta\text{Close}|$ ) — мнения участников рынка о будущей динамике цены становятся однородными — тем меньше величина показателя  $VM$ . И наоборот: чем слабее тренд (чем меньше вели-

чина  $|\Delta \text{Close}|$ ), тем больше величина показателя  $VM$  — мнения участников рынка о будущей динамике цены становятся неоднозначными.

## 2.2. СРАВНЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ ТЕКУЩЕЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ И ЭНТРОПИИ ГРАССБЕРГЕРА — ПРОКАЧЧИА

Во всем исследовании при расчете  $E$  брались средние значения котировок, рассчитанные по формуле:

$$AP_i = (\text{Low}_i + \text{High}_i + \text{Open}_i + \text{Close}_i)/4.$$

Поскольку  $E$  является интегральным показателем (рассчитывается за период времени, величина которого равна количеству членов анализируемого временного ряда, умноженному на глубину горизонта  $\Delta t$ ), показатель  $AVM$ , который применялся для анализа, также считался как среднее арифметическое за анализируемый период времени:

$$AVM = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n VM_i,$$

где  $n$  — количество свечей, участвующих в расчете  $VM$ , и количество членов ряда  $AP_i$ , участвующих в расчете  $E$ . Как правило, в наших расчетах использовалось  $n = 2500$ . При этом расчеты проводились на достаточно большом календарном диапазоне, когда значения  $AVM$  и  $E$  считались по 250 временным рядам с шагом между начальными членами рядов в 50 свечей. То есть последующий временной ряд для расчетов выбирался через 50 свечей от начала предыдущего временного ряда и тоже имел 2500 членов ряда. Впервые рассматриваемый алгоритм был предложен в [13].

Базой исследования был выбран FOREX. В качестве количественной меры сравнения  $VM$  и  $E$  использовалось значение коэффициента парной линейной корреляции.

Были отобраны случаи, когда или величина  $E$  непрерывно возрастает (убывает), или величина  $AVM$  непрерывно возрастает (убывает). То есть были отобраны случаи явно выраженных трендов в динамике  $E$  и  $AVM$ . При этом считалось, что случай заслуживает внимания и включения в выборку, если количество временных рядов, на которые разбивался исходный временной ряд для последующего интегрирования, участвующих в формировании тренда, более 5. Каждый ряд после его интегрирования с помощью  $E$  был представлен одним числом (то же самое касается и  $AVM$ ).

Всего таких ситуаций по отобранным парам валют набралось 89. Из них с положительными значениями коэффициента парной корреляцией — 41 (46%) и с отрицательными значениями коэффициента парной корреляцией — 48 (54%), то есть примерно поровну.

Все ситуации распределялись по следующему шаблону (см. табл. 2.1).

Таблица 2.1

**Шаблон для анализа корреляционных зависимостей между  $E$  и  $AVM$**

$E$ и $AVM$ убывают	$E$ возрастает и $AVM$ убывает
$E$ убывает и $AVM$ возрастает	$E$ и $AVM$ возрастают

По этому шаблону были построены матрицы  $\mathbf{D}_1$ ,  $\mathbf{D}_2$ ,  $\mathbf{D}_3$  (см. формулы (2.4) — (2.6)). Числовые значения в матрицах (2.4) — (2.6) показывают количество ситуаций с положительной и отрицательной корреляцией соответственно.

Матрица  $\mathbf{D}_1$  построена для положительных значений коэффициента парной корреляции между  $E$  и  $AVM$ :

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Матрица  $\mathbf{D}_2$  построена для отрицательных значений коэффициента парной корреляции между  $E$  и  $AVM$ :

$$\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 31 \\ 14 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Матрица  $\mathbf{D}_3$  построена как сумма матриц  $\mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{D}_2$ :

$$\mathbf{D}_3 = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 26 & 32 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Гипотеза о взаимозависимости  $E$  и показателя  $VM$  была протестирована на различных временных горизонтах ( $\Delta t$ ) и календарных диапазонах для различных валютных пар. При этом для валютной пары JPY/USD брались дневные котировки за период времени с 03.01.1978 по 07.09.2004; для валютной пары EUR/USD брались дневные котировки за период времени с 07.04.1989 по 22.09.2004; для валютной пары GBP/USD брались дневные котировки за период времени с 03.01.1978 по 07.09.2004; для валютной пары EUR/GBP — часовые котировки с 02.10.2003 по 17.08.2004; для валютной



пары EUR/USD — часовые котировки с 01.04.2004 по 29.07.2005. Было сделано следующее допущение: перерыв в работе рынка в выходные и праздничные дни не влияет на результаты расчетов.

Основные результаты расчетов корреляционных зависимостей между  $E$  и  $AVM$  представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

**Основные результаты расчетов**

Валютная пара и $\Delta t$	Количество рядов	Количество членов ряда	AVM			E			Корреляция по ряду
			нач. значение	конеч. значение	разность	нач. значение	конеч. значение	разность	
EUR/USD, час	115	16	13,94	14,27	0,32	0,07	0,06	0,01	0,45
		10	14,16	12,93	1,24	0,06	0,06	0,00	0,78
		11	12,95	13,49	0,54	0,06	0,06	0,00	0,51
		7	12,55	13,98	1,44	0,07	0,06	0,00	0,70
		9	15,48	17,74	2,27	0,06	0,07	0,01	0,95
		12	17,92	13,80	4,12	1,44	0,07	0,07	0,67
		9	13,48	15,45	1,96	0,16	0,06	0,06	0,71
	9	14,85	17,74	2,89	0,15	0,06	0,07	0,95	
USD/CHF, день	104	11	11,46	11,67	0,21	0,04	0,04	0,00	0,36
		34	11,30	6,37	4,93	0,04	0,06	0,02	0,98
		16	5,94	6,25	0,31	0,06	0,06	0,00	0,95
		12	6,19	6,08	0,11	0,06	0,06	0,00	0,79
		38	11,79	6,26	5,53	1,06	0,04	0,06	0,97
EUR/USD, день	31	12	5,02	5,20	0,18	0,04	0,03	0,00	0,93
		10	4,73	5,13	0,40	0,73	0,04	0,04	0,69
GBP/USD, час	140	1	22	22	5,02	5,01	0,01	0,06	0,05
		27	49	23	4,89	4,41	0,48	0,05	0,06
		120	134	15	3,83	3,86	0,03	0,06	0,05
		24	36	13	5,01	4,52	0,49	0,28	0,05
		41	66	26	4,60	3,87	0,73	0,26	0,05
GBP/USD, день	90	18	9,27	9,09	0,19	0,05	0,06	0,01	0,63
		6	8,37	8,11	0,26	0,06	0,05	0,00	0,85
		8	7,90	7,17	0,73	0,05	0,06	0,01	0,85

Продолжение табл. 2.2

Валютная пара и $\Delta t$	Количество рядов	Количество членов ряда	AVM			E			Корреляция по ряду
			нач. значение	конеч. значение	разность	нач. значение	конеч. значение	разность	
		9	9,69	8,39	1,30	1,60	0,05	0,06	0,95
		13	9,27	9,74	0,46	0,21	0,05	0,05	0,88
		13	8,48	7,72	0,76	0,26	0,06	0,05	0,84
		10	8,11	7,12	1,00	0,28	0,06	0,06	0,84
		14	7,18	6,31	0,87	0,21	0,06	0,06	0,72
USD/ JPY, час	142	17	14,57	13,18	1,39	0,06	0,06	0,00	0,93
		19	13,18	11,41	1,77	0,06	0,06	0,00	0,91
		28	11,41	9,59	1,82	0,06	0,05	0,01	0,89
		43	9,59	10,15	0,56	0,05	0,06	0,01	0,46
		16	10,15	9,85	0,30	0,06	0,05	0,01	0,57
		8	12,52	11,37	1,15	0,18	0,06	0,06	0,96
		9	11,13	9,42	1,71	0,24	0,06	0,05	1,00
USD/ CHF, час	310	11	4,53	4,48	0,05	0,03	0,04	0,01	0,53
		17	4,40	4,32	0,08	0,04	0,05	0,01	0,89
		20	4,32	4,27	0,05	0,05	0,04	0,02	0,82
		10	4,44	4,54	0,10	0,03	0,04	0,01	0,94
		16	4,63	4,60	0,04	0,04	0,03	0,01	0,03
		21	4,39	4,15	0,24	0,04	0,05	0,01	0,94
		9	4,15	3,96	0,19	0,05	0,04	0,01	0,95
		10	3,87	3,76	0,11	0,04	0,05	0,01	0,98
		19	3,83	3,74	0,09	0,05	0,04	0,01	0,15
		10	4,53	4,38	0,14	0,08	0,04	0,04	0,80
		15	4,26	4,50	0,24	0,04	0,03	0,04	0,69
		10	4,38	4,18	0,20	0,02	0,04	0,05	0,95
		19	4,22	3,82	0,40	0,04	0,05	0,04	0,72
10	3,88	3,73	0,15	0,01	0,04	0,04	0,85		
EUR/ JPY, день	44	12	10,11	11,21	1,10	0,02	0,03	0,00	0,92
		16	11,22	13,93	2,71	0,03	0,03	0,00	0,91
		8	58,20	7,84	50,36	19,1	0,03	0,03	0,92

Продолжение табл. 2.2

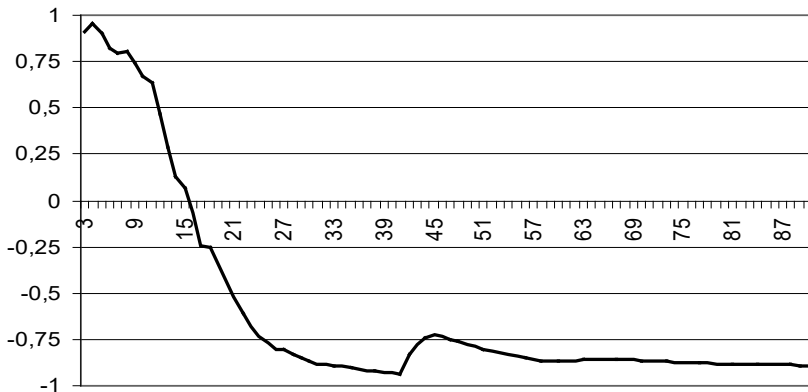
Валютная пара и $\Delta t$	Количество рядов	Количество членов ряда	AVM			E			Корреляция по ряду
			нач. значение	конеч. значение	разность	нач. значение	конеч. значение	разность	
		9	10,51	12,60	2,09	0,57	0,03	0,03	0,96
		7	12,52	14,03	1,50	0,27	0,03	0,03	0,97
USD/ CAD, час	227	12	5,26	5,05	0,21	0,04	0,05	0,00	0,94
		9	4,28	4,29	0,01	0,04	0,04	0,00	0,38
		11	4,29	4,30	0,00	0,04	0,04	0,01	0,53
		30	4,33	4,53	0,20	0,04	0,05	0,01	0,89
		9	4,68	4,85	0,16	0,05	0,05	0,01	0,96
		17	4,91	4,60	0,31	0,05	0,05	0,01	0,98
		19	4,55	4,07	0,49	0,05	0,05	0,01	0,99
		13	3,93	3,65	0,28	0,05	0,06	0,01	0,99
		12	5,48	5,13	0,34	0,54	0,04	0,04	0,69
		9	5,14	4,97	0,17	0,16	0,04	0,05	0,88
		23	5,01	4,26	0,75	0,37	0,05	0,05	0,64
		22	4,38	4,85	0,47	0,09	0,04	0,05	0,55
		10	4,87	5,03	0,16	0,02	0,05	0,05	0,94
		17	5,10	4,71	0,39	0,05	0,05	0,05	0,92
		10	4,72	4,50	0,22	0,03	0,05	0,05	0,50
		32	4,53	3,65	0,88	0,10	0,05	0,06	0,94
		11	3,65	3,54	0,11	0,01	0,06	0,06	0,55
EUR/ JPY, час	255	28	15,28	12,13	3,14	0,05	0,06	0,00	0,87
		16	11,64	11,71	0,07	0,06	0,06	0,00	0,31
		8	13,80	14,34	0,54	0,06	0,05	0,00	0,97
		10	15,16	15,68	0,52	0,06	0,06	0,00	0,32
		15	16,69	15,41	1,28	0,06	0,06	0,00	0,75
		20	14,68	13,67	1,01	0,06	0,06	0,00	0,97
		14	17,54	13,86	3,67	1,46	0,05	0,05	0,64
		17	15,98	13,89	2,09	0,09	0,06	0,06	0,94
		15	10,08	8,09	1,99	0,10	0,06	0,06	0,90

Валютная пара и $\Delta t$	Количество рядов	Количество членов ряда	AVM			E			Корреляция по ряду
			нач. значение	конеч. значение	разность	нач. значение	конеч. значение	разность	
EUR/ JPY, день	44	12	10,11	11,21	1,10	0,02	0,03	0,00	0,92
		16	11,22	13,93	2,71	0,03	0,03	0,00	0,91
		8	58,20	7,84	50,36	19,1	0,03	0,03	0,92
		9	10,51	12,60	2,09	0,57	0,03	0,03	0,96
		7	12,52	14,03	1,50	0,27	0,03	0,03	0,97
USD/ JPY, день	90	33	51	19	485,32	147,4	337,9	0,02	0,03
		2	61	60	1010,7	15,71	995,0	3,18	0,02

Пояснения к таблице 2.2:

- столбец 1: исследуемая валютная пара, глубина горизонта исследования  $\Delta t$ ;
- столбец 2: количество исследуемых рядов таких, что или величина  $E$  непрерывно возрастает (убывает), или величина  $AVM$  непрерывно возрастает (убывает);
- столбец 3: длина исследуемого в строке ряда (не менее 5 членов);
- столбец 4: начальное значение  $AVM$  по анализируемому в строке ряду;
- столбец 5: конечное значение  $AVM$  по анализируемому в строке ряду;
- столбец 6: разность между значением в столбце 5 и значением в столбце 4 по строке;
- столбец 7: начальное значение  $E$  по анализируемому в строке ряду;
- столбец 8: конечное значение  $E$  по анализируемому в строке ряду;
- столбец 9: разность между значением в столбце 8 и значением в столбце 7 по строке;
- столбец 10: парная корреляция по анализируемому в строке ряду.

На рис. 2.4 представлен пример корреляционной зависимости между  $E$  и  $AVM$  от количества временных рядов, участвующих в расчете, для валютной пары USD/JPY для дневного горизонта ( $\Delta t = 1$  сутки) в календарном диапазоне с 03.01.1978 по 07.09.2004.



**Рис. 2.4.** Динамика значения коэффициента парной корреляции  $E$  и  $AVM$  в зависимости от количества временных рядов для валютной пары USD/JPY

На рис. 2.4 по оси абсцисс указано количество временных рядов, участвующих в расчете, а по оси ординат — значение коэффициента парной корреляции  $E$  и  $AVM$  (в расчетах использовались 90 временных рядов по 2500 членов ряда).

Исходя из графика, представленного на рис. 2.4, можно сделать вывод о существовании корреляционной зависимости между  $E$  и  $AVM$  в долгосрочном периоде (даже несмотря на существенную нелинейность исследуемого процесса): с уменьшением величины  $E$  — величина  $AVM$  увеличивается, и наоборот.

Несмотря на высокое значение коэффициента парной корреляции (практически равен числу 1) при рассмотрении достаточно большого количества временных рядов, очевидно, что динамика такой корреляционной зависимости нелинейная и неоднозначная.

Анализ значений, представленных в матрицах  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  и таблице 2.2, позволил сделать следующие выводы:

- из всех рассмотренных случаев — 72% со значениями коэффициента парной корреляции по модулю, большими 0,7, что говорит о том, что, как правило,  $E$  и  $AVM$  в отобранных в выборке случаях имеют устойчивую динамику, и подтверждает репрезентативность выборки;
- из всех рассмотренных случаев — более 65% приходится на ситуации, когда  $AVM$  убывала (матрица  $D_3$ ). Это говорит о том, что энтропия изменяется чаще, когда определенность на рынке

повышается, т.е. рынок находится в ожидании скорейшего появления нового тренда или коррекции текущего;

- данные матрицы  $\mathbf{D}_1$  говорят, что при положительной корреляции между  $E$  и  $AVM$  максимальное число событий (61%) приходится на ситуации, когда одновременно уменьшаются величины  $E$  и  $AVM$ . То есть при повышении степени определенности на рынке снижается его текущая волатильность. Такие ситуации возникают, когда на рынке происходит коррекция действующего тренда с последующим его продолжением;
- данные матрицы  $\mathbf{D}_2$  говорят, что при отрицательной корреляции между  $E$  и  $AVM$  максимальное число событий (67%) приходится на ситуации, когда увеличивается величина  $E$  и уменьшается величина  $AVM$ . То есть при снижении степени определенности на рынке уменьшается значение  $AVM$ . Такие ситуации возникают, когда на рынке происходит коррекция действующего тренда с возможностью как последующего его продолжения, так и смены на новый противоположный тренд.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что  $E$  и  $AVM$ , учитывая существенную нелинейность анализируемого процесса, довольно тесно коррелируют между собой в представленной выборке (среднее значение парной корреляции по модулю по представленной выборке равно 0,79). Поэтому считаем, что  $AVM$  адекватно реагирует на изменения рынка и, следовательно,  $VM$  (как показатель, который был использован при расчете  $AVM$ ) можно рассматривать в качестве меры предсказуемости динамики рыночной цены. Использование  $VM$  вместо энтропии Грассбергера — Прокаччия позволит снизить сложность расчетов при анализе и моделировании процессов, проходящих на финансовых рынках и, тем самым, уменьшить погрешность вычислений.

В дальнейшем полученный результат может быть использован для тестирования различных характеристик социально-экономических систем любой природы на предмет использования этих характеристик в качестве меры неопределенности (предсказуемости) исследуемой системы.

Чтобы представить, как использовать изложенный алгоритм для анализа и прогнозирования экономических процессов в случае одномерности ряда, можно применить предложенный в [35] механизм приведения одномерного экономического временного ряда к четырехмерному.

Разберем этот механизм на конкретном примере. Пусть  $\Delta t$  – периодичность проведения замеров экономического параметра  $p$  в виде одномерного ряда  $p_i$  ( $i = \{1, n\}$ , пусть  $\Delta t = 1$  день). Выберем  $\Delta T = 1$  декада (10 дней, хотя в рамках исследования конкретной экономической системы значения  $\Delta t$  и  $\Delta T$  могут быть иными).

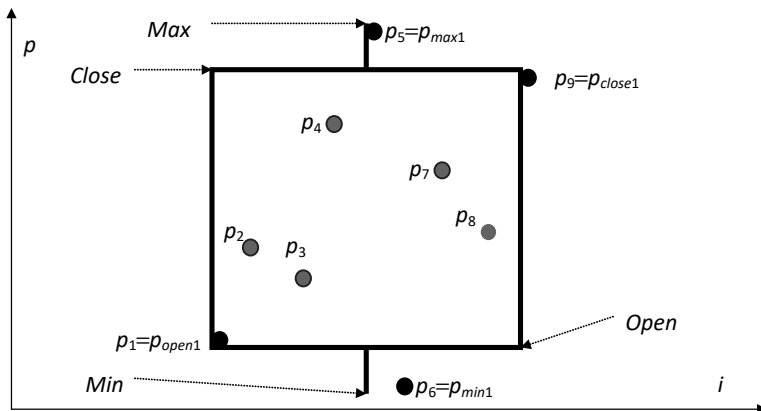
За первые десять дней ( $i = \{1, 10\}$ ) среди значений  $p_i$  выберем значения  $p_{open\ 1}$  – значение на начало периода  $\Delta T = 1$ ,  $p_{max\ 1}$  – максимальное значение  $p_i$  за период  $\Delta T$ ,  $p_{min\ 1}$  – минимальное значение  $p_i$  за период  $\Delta T$ ,  $p_{close\ 1}$  – значение на конец периода  $\Delta T$ . Построенная таким образом свеча определяет значение первого члена четырехмерного ряда  $P_j, j = \{1, m\}$  за первую декаду  $P_1$  ( $j = 1$ ).

Аналогично строим свечу  $P_2$  за вторую декаду, когда  $j = 2$ , и так далее.

Построенный таким образом четырехмерный ряд  $P_j$  ( $j = \{1, m\}$ ), где  $m = n/10$ ,  $P_j = \{p_{open\ j}, p_{max\ j}, p_{min\ j}, p_{close\ j}\}$ , и является исходным для использования описанного выше алгоритма.

Для наглядности на рис. 2.5 представлена свеча, построенная для  $P_1$ , где  $n/m = 9$ .

На рис. 2.5 свеча имеет белый цвет, так как за период времени  $\Delta T = 1$  значения членов одномерного ряда  $p_i$  увеличивались от величины  $p_1$  до величины  $p_9$ . При этом динамика ряда  $p_i$  была неоднозначной: за период времени  $\Delta T = 1$  значения членов одномерного ряда  $p_i$  достигали максимума в точке  $p_5$  и минимума в точке  $p_6$ . При построении свечи  $P_1$  остальными значениями  $p_i$  можно пренебречь, что и отражено на рис. 2.5: точки  $p_2, p_3, p_4, p_7, p_8$  выделены серым цветом, а точки  $p_1, p_5, p_6, p_9$  выделены черным цветом как существенные для построения свечи  $P_1$ .



**Рис. 2.5.** Иллюстрация алгоритма построения значения четырехмерного ряда из одномерного ряда  $p_i$  для первого члена  $P_1$  четырехмерного ряда

Предложенная методика приведения одномерного временного ряда к четырехмерному вектору-ряду была использована в [35] для определения возможности и целесообразности использования остатков средств на текущих клиентских счетах в качестве ресурсной базы банка.

Для корректности рекомендуется использовать показатель текущей волатильности  $VM$  в качестве меры предсказуемости после предварительного анализа исследуемой системы на предмет наличия в динамике ее развития детерминированной составляющей. Именно для детерминированного процесса (пусть даже при наличии некоторой доли зашумленности) предполагается возможность корректного использования показателя текущей волатильности  $VM$  в качестве меры предсказуемости поведения системы. Возможность использования в этом качестве показателя текущей волатильности для случайных (вероятностных) процессов требует дополнительных исследований.

Используя алгоритмы, описанные в этом разделе, можно адекватно анализировать социально-экономические системы различной природы на предмет предсказуемости их поведения с использованием показателя текущей волатильности.



## Глава 3

# ЭНТРОПИЯ И РЕКУРРЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ В ЭКОНОМИКЕ

В последнее время все большее внимание исследователей и ученых в области анализа сложных динамических систем привлекает теория нелинейной динамики. Большинство методик такого подхода и соответствующие модели требуют достаточно длинных и стационарных рядов данных, что не является типичным свойством для серий измерений естественных процессов. Кроме того, такие методики и модели удовлетворительно работают при соблюдении определенных требований [30–33].

Рассмотрение такого специфического инструмента анализа, как рекуррентные графики, в контексте применения энтропии при моделировании экономических систем обосновано тем, что рекуррентные методы позволяют анализировать синтетические, искусственные, «производные» структуры, которые тем не менее отражают внутренние зависимости и взаимосвязи исходного временного ряда. Таким образом, рекуррентный анализ позволяет получить количественные оценки структуры временного ряда, порождаемого экономической системой. А такие оценки могут быть в некотором роде сопоставлены и с таким фундаментальным понятием, как энтропия.

Развитие методов анализа сформировало необходимость использования нового инструмента, основанного на фундаментальных свойствах диссипативных динамических систем, не предъявляющего особых требований к данным и дающего удовлетворительные результаты. Таким инструментом нелинейного анализа являются рекуррентные графики. Необходимо отметить, что они не представляют собой графики в классическом их понимании. В данном случае — это отображения рекуррентности, т.е. рекуррентные диаграммы.

Как известно, даже самое малое возмущение в сложной динамической системе может вызвать экспоненциальное отклонение от предшествующего состояния, но по прошествии некоторого времени система стремится вернуться в режим, достаточно близкий к предыдущему, или проходит через похожие ступени развития. Рекуррентные графики визуализируют такое рекуррентное поведение динамической системы. Кроме того, данный инструментарий

применим к коротким и нестационарным рядам, что является преимуществом перед другими способами нелинейного анализа.

Значительное развитие получили методы анализа стохастических и хаотических процессов, в особенности методы фрактального анализа. Однако использование методов рекуррентного анализа экономических временных рядов рассмотрено недостаточно детально. Корректность возможности применения существующих методов рекуррентного анализа временных рядов для анализа социально-экономических систем требует особого внимания.

### 3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ

Эволюцию динамической системы удобно иллюстрировать в фазовом пространстве — абстрактном пространстве, в котором координатами служат компоненты состояний. При этом координаты выбираются в зависимости от контекста. В случае механических систем это могут быть положение и скорость, в случае экологических систем — популяции биологических видов, экономических — цена на фондовом или валютном рынке.

Как известно, состояние системы описывается параметрами состояния:

$$x^1(t), x^2(t), \dots, x^d(t),$$

где верхние индексы указывают на нумерацию компонент. Набор параметров состояния в момент  $t$  формирует вектор  $\vec{x}(t)$  в  $d$ -мерном пространстве, называемом фазовым. Этот вектор изменяется во времени и направлении:

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{F}(t),$$

а временной ход векторов фазового пространства определяет фазовую траекторию. Очевидно, поле скоростей  $\vec{F}(t)$  будет касательной к этой траектории. Для автономных систем такая траектория является самонепересекающейся.

Подобная графическая реализация во времени дает непосредственную информацию о динамике системы, т.е. указывает на аттрактор системы. Имея дело с реальным процессом и реальным его наблюдением, приходится иметь дело только с одним наблюдением  $u(t)$  и одним дискретным временным рядом  $u_i$ , где  $t = i \cdot \Delta t$ , а  $\Delta t$  — минимальный шаг по времени. На практике не всегда уда-

ется провести измерения через равные промежутки времени. Это усложняет анализ полученных временных рядов или вовсе сводит на нет целый ряд стандартных методов анализа. Использование рекуррентного анализа не накладывает подобных ограничений и применимо для нестационарных рядов данных.

Поскольку сложные системы содержат много компонент, и их поведение определяется большим числом взаимодействий, то даже одна из этих компонент несет существенную информацию о динамике всей системы в целом. Следовательно, посредством построения фазовой траектории можно восстановить топологию полной фазовой траектории, как если бы использовались все компоненты системы. Такой подход впервые был предложен группой американских ученых [103], которые показали, что можно получить удовлетворительную картину странного аттрактора небольшой размерности, если вместо переменных  $\vec{x}$ , входящих в уравнение динамической системы, использовать  $m$ -мерные вектора, полученные из элементов временного ряда. Нидерландский математик Флорис Такенс (1940–2010) сформулировал соответствующую теорему [125], которая лежит в основе всех алгоритмов анализа временных рядов методами нелинейной динамики, как способ реконструкции фазовой траектории  $\vec{x}(t)$  по методу отображения запаздывающих аргументов:

$$\vec{x}_i = (u_i, u_{i+\tau}, \dots, u_{i+(m-1)\tau}),$$

где  $m$  — размерность вложения,  $\tau$  — запаздывание по времени. Сохранение топологических структур исходной траектории гарантировано, если  $m \geq 2 \cdot d + 1$ , где  $d$  — размерность аттрактора [123, 125].

Существует много способов определения размерности аттракторов, в т.ч. методика выявления «ложных точек» Марвана [114], метод корреляционных сумм, методы исчисления величины запаздывания (определения автокорреляционной функции, метод взаимной информации), методы сингулярного разложения, анализ независимых компонент. Среди этих методов особое место занимает метод определения размерностей вложения с использованием рекуррентных графиков [111, 133, 134].

Понятие рекуррентности известно довольно давно и обсуждалось в научных публикациях еще с XIX века, когда одним из основных объектов исследований были движения планет, описываемые уравнениями небесной механики. Так, еще в 1880-х годах Анри Пуанкаре был получен ряд важных результатов, составивших впоследствии основу современной теории динами-

ческих систем. В частности, им была отмечена сложность поведения системы в окрестности так называемой гомоклинической траектории (траектория стремится к некоторой неподвижной точке или периодической траектории как при  $t \rightarrow \infty$ , так и при  $t \rightarrow -\infty$ ) [39]. Этот результат был опубликован как «теорема рекуррентности» [126]: если система сводит свою динамику к ограниченному подмножеству фазового пространства, то система почти наверняка, т.е. с вероятностью, равной единице, сколь угодно близко возвращается к какому-либо изначально заданному режиму.

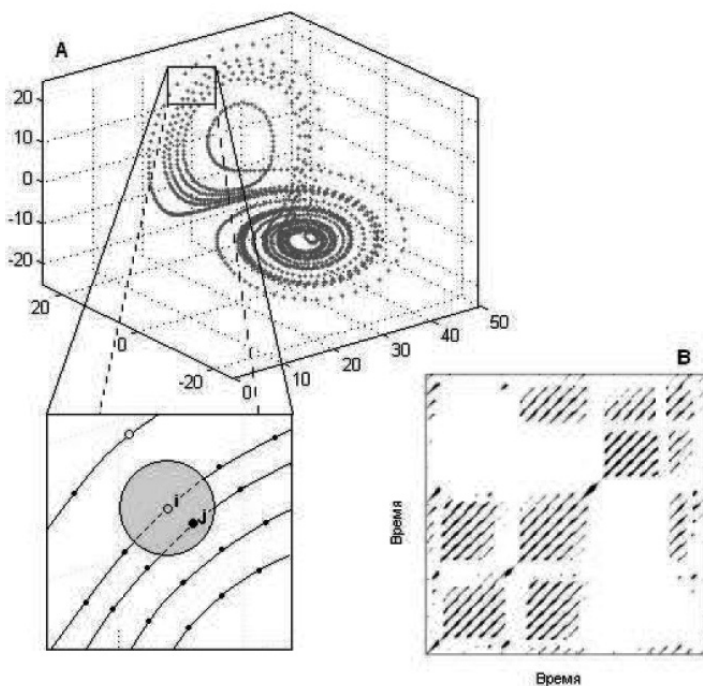
Итак, рекуррентность состояний в том понимании, что они являются повторяющимися по прошествии некоторого времени, есть фундаментальное свойство диссипативных динамических систем.

Нелинейный анализ временных рядов предлагает широкий спектр методов для расчета различных динамических параметров, таких как информационная размерность, энтропия, показатели Ляпунова, спектр мощности и другие. Во всех случаях предполагается, что речь идет об автономной динамической системе и что длина рассматриваемого ряда превышает характеристическое время установления системы. Кроме того, почти всегда присутствуют требования стационарности временных рядов и постоянства шага (например, постоянство шага по времени:  $u_i$ , где  $t = i \cdot \Delta t$ , а  $\Delta t = \text{const}$ ).

Такой специфический инструмент, как рекуррентные графики (Recurrent Plots — RP), был разработан в 1987 году Экманом, Кампхорстом и Рюэллем. RP не накладывает существенных ограничений на данные, а потому позволяют работать практически с любыми рядами [102]. Более того, часто системы обладают многомерными фазовыми траекториями, что делает возможным изображать только проекции таких траекторий на двух- и трехмерных подпространствах. Преимущество предлагаемого графического инструмента состоит в том, что он позволяет исследовать  $m$ -размерную траекторию фазового пространства посредством двумерного представления его рекуррентности и дает возможность видеть динамическую картину в целом (рис. 3.1).

На рис. 3.1 **A** — это сегмент фазовой траектории системы (аттрактора) Лоренца [80, с. 88–116], построенной со стандартными управляющими параметрами  $r = 28$ ,  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ , **B** — рекуррентный график для данной динамической системы. Если точка траектории в момент времени  $j$  (большая черная точка сегмента траектории) попадает в окрестность некой другой в момент  $i$  (серая точка), то такие точки считаются рекуррентными и на рекуррентной диаграмме появляется точка черного цвета с координатами

$(i, j)$ . Если точка фазовой траектории располагается вне выбранной окрестности, то на диаграмме отмечается белая точка.



**Рис. 3.1.** Пример фазовой траектории

Аттрактор Лоренца был найден в численных экспериментах Э.Н. Лоренца, исследовавшего поведение траекторий нелинейной системы. Эдвард Нортон Лоренц (1917–2008) — американский математик и метеоролог, один из основоположников теории хаоса, автор выражения «эффект бабочки». Эффект бабочки — это термин в естественных науках, обозначающий свойство некоторых хаотичных систем. Незначительное влияние на систему может иметь большие и непредсказуемые последствия где-нибудь в другом месте и в другое время.

Для того чтобы построить рекуррентный график, необходимо для начала реконструировать фазовую траекторию. Пусть теперь точка  $\vec{x}(i)$  соответствует  $i$ -й точке фазовой траектории, описывающей выбранную динамическую систему в  $m$ -мерном пространстве, для  $i = \overline{1, N}$ , тогда рекуррентный график представляет собой массив

в точке  $N \times N$ , где ненулевой элемент с координатами  $(i, j)$  соответствует случаю, когда  $\vec{x}(j)$  достаточно близко к  $\vec{x}(i)$ .

Можно дать следующее определение [114]: рекуррентность состояния в момент  $i$  при различных значениях времени  $j$  воспроизводится внутри двумерной квадратной матрицы с черными и белыми точками, где черные точки обозначают наличие рекуррентности, а по обеим осям откладывается время. Такое представление и называется рекуррентным графиком. Математически это может быть выражено следующим образом:

$$R_{ij} = \theta(\epsilon_i - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|), \vec{x}_i \in \mathbf{R}^m, i = \overline{1, N}, \vec{x}_j \in \mathbf{R}^m, j = \overline{1, N},$$

где  $N$  — число рассматриваемых состояний  $x_i$ ,  $\epsilon_i$  — граничное состояние или расстояние от центра выбранной окрестности (точка  $\vec{x}(i)$ ) до ее границы,  $\|\cdot\|$  — норма (метрика), и  $\theta(\cdot)$  — функция Хевисайда.

Согласно определению, основная диагональ  $R_{ii} = 1, i = \overline{1, N}$  (под углом  $\pi/4$ ) полностью состоит из черных точек и называется линией тождественности. Стоит подчеркнуть, что отдельные рекуррентные точки  $(i, j)$  не несут никакой информации о текущем состоянии в моменты  $i$  и  $j$ , однако в совокупности позволяют реконструировать свойства процесса.

На практике невозможно обнаружить абсолютно рекуррентные состояния в том смысле, что  $\vec{x}_i \equiv \vec{x}_j$ , по этой причине состояние  $\vec{x}(i)$  рекуррентно состоянию  $\vec{x}(j)$ , если они оказываются достаточно близки друг другу. Это означает, что вектора  $\vec{x}(j)$ , попадающие в  $m$ -мерную окрестность (например, шар в  $L_2$ -норме или квадрат в  $L_\infty$ -норме) радиуса  $\epsilon_i$  с центром на значении  $\vec{x}(i)$ , являются рекуррентными, а также  $\vec{x}(j)$  называются рекуррентными точками.

С самого начала исследования рекуррентных графиков было отмечено, что при определении окрестности в форме шара фиксированного радиуса рекуррентные графики будут демонстрировать симметричные структуры относительно главной диагонали, поскольку если  $\vec{x}(i)$  близко к  $\vec{x}(j)$ , то вероятно и обратное:  $\vec{x}(j)$  близко к  $\vec{x}(i)$ . Однако картина усложнится, если не накладываться условие на равенство радиусов  $i$ -й и  $j$ -й окрестностей. Другими словами, математически это можно объяснить следующим образом [114]: определение окрестности в форме шара с таким радиусом, что он охватывает строго фиксированное количество состояний  $\vec{x}(j)$ . Иначе говоря,  $\epsilon_i$  выбирается для каждого  $\vec{x}_i$  по отдельности.  $R_{ij} \neq R_{ji}$ , поскольку окрестность, определенная для  $\vec{x}(i)$ , не обязана совпадать с окрестностью для  $\vec{x}(j)$ . Это и приводит к асимметрии

рекуррентного графика, однако все его колонки имеют одинаковую плотность рекуррентности.

Используя такой критерий, как  $\epsilon$ , можно легко определить плотность рекуррентности в том смысле, что, выбрав  $\epsilon = 0,15$ , локально определяемый радиус  $\epsilon_i$  вводится таким образом, что соответствующая ему окрестность покрывает 15% всех векторов фазового пространства, следовательно, плотность рекуррентности равна 0,15. Такой подход называют *фиксированные числа ближайших точек* (Fixed Amount of Nearest Neighbors — FAN), что обусловлено фиксированным количеством векторов фазового пространства, попадающих в выбранную окрестность. Таким образом, есть два способа определения окрестности:

$$\epsilon_i = \epsilon = \text{const}, \forall i, \Rightarrow R_{ij} = R_{ji},$$

$$\epsilon_i \neq \text{const} \Rightarrow R_{ij} \neq R_{ji}.$$

Тот или иной тип окрестности выбирается исследователем в зависимости от его предпочтений или какой-либо специфики прикладного использования рекуррентных графиков.

Следующим шагом в построении рекуррентного графика является выбор нормы, наиболее известными среди которых являются  $L_1$ -норма,  $L_2$ -норма (Евклидова норма) и  $L_\infty$ -норма (максимальная норма).

Приведем формулы вычисления значений указанных норм. Пусть заданы два  $m$ -мерных вектора:  $\mathbf{x} = (x_1; \dots; x_i; \dots; x_m)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1; \dots; y_i; \dots; y_m)$ . Тогда значение  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  в  $L_1$ -норме,  $L_2$ -норме,  $L_\infty$ -норме соответственно равны:

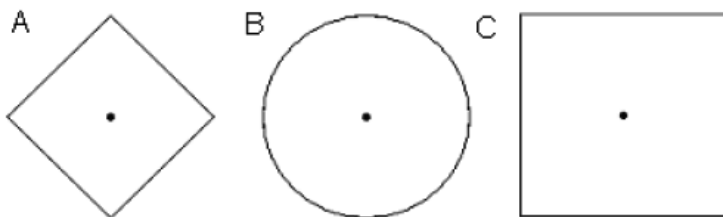
$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 = \sum_{i=1}^m |x_i - y_i|,$$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2},$$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty = \max_i |x_i - y_i|.$$

В зависимости от нормы будут различаться и формы окрестности (рис. 3.2).

На рис. 3.2 изображены три типа нормы, представленные в двумерном пространстве: **A** —  $L_1$ -норма, **B** —  $L_2$ -норма, **C** —  $L_\infty$ -норма. Окрестности, выбранные на основе этих норм, будут характеризоваться радиусами одинаковой величины.



**Рис. 3.2.** Формы окрестностей для основных видов норм

При построении рекуррентного графика с фиксированным значением  $\epsilon$ , в окрестность с  $L_\infty$ -нормой может попасть наибольшее количество близлежащих векторов фазового пространства по сравнению с другими нормами, а при выборе  $L_1$ -нормы, наоборот, — наименьшее. Предпочтения по выбору нормы опять же зависят от целей, которые преследуются в исследовании. Так, например,  $L_\infty$ -норма не зависит от размерности фазового пространства и легка в вычислении по сравнению с двумя другими.  $L_1$ -норма обеспечивает наиболее устойчивую рекуррентность состояний, поскольку если вектора фазового пространства рекуррентны для  $L_1$ -нормы, то они будут рекуррентны и при использовании двух других норм [130].

Стоит отметить принципы выбора значения пороговой величины  $\epsilon$ . Желательно использовать минимальное из возможных значений. Но на практике, в условиях присутствия шумовой компоненты, приходится несколько увеличивать пороговую величину. В случае, когда  $\epsilon_i = \epsilon, \forall i$ , рекомендуется выбирать пороговое значение не более 10% от значения  $\sigma$  — максимального диаметра фазового пространства, если же  $\epsilon_i \neq \text{const}$ , то пороговое значение рассчитывается по отношению к плотности рекуррентности. В случае использования нестационарных данных величина  $\epsilon$  может уменьшаться до 1%.

Существуют определенные рекомендации по выбору величины значения  $\epsilon$  [120, 121, 134]. Рекомендуется выбирать значение  $\epsilon$  от нескольких до 10% от максимального диаметра фазового пространства. Можно выбирать  $\epsilon$  в соответствии с плотностью рекуррентных точек RP, отыскивая область градации в плотности рекуррентных точек. Однако это может быть недопустимым для нестационарных данных. В этом случае предлагается выбирать  $\epsilon$  таким, чтобы приблизительная плотность рекуррентных точек составляла 1%.



Другим критерием выбора  $\epsilon$  является учет того, что измерения складываются из реального сигнала и некоторого наблюдаемого шума со стандартным отклонением  $\sigma$ . Для получения соизмеримых результатов  $\epsilon$  выбирается в 5 раз больше, чем стандартное отклонение наблюдаемого шума, т.е.  $\epsilon > 5 \cdot \sigma$ . Этот критерий эффективно работает для широкого круга процессов.

Для периодических и квазипериодических процессов диагональные структуры внутри RP могут быть использованы для определения оптимального порога. С этой целью берется распределение густоты рекуррентных точек вдоль линии идентичности (ЛИ), которая соответствует диагонально определенной  $\tau$ -рекуррентной степени  $RR_\tau$ . Из графика густоты определяется  $N_p$  — количество значащих пиков. Далее определяется количество соседей  $N_n$ , которые имеет каждая точка. Порог  $\epsilon$  выбирается таким образом, чтобы  $N_p$  было максимальным, а  $N_n$  — приближалось к  $N_p$ . Поэтому оптимальное значение для  $\epsilon$  находится из требования минимизации величины

$$\bar{x}_i \approx \bar{x}_j \Leftrightarrow R_{i,j} = 1.$$

Этот критерий минимизирует фрагментацию и толщину диагональных линий относительно порога, что может быть полезным для устранения шумов.

Другие приближения используют фиксированную густоту рекуррентных точек. Для нахождения  $\epsilon$ , которое соответствует устойчивому значению густоты рекуррентных точек  $RR$  (степени рекуррентности), можно использовать кумулятивное распределение состояний  $N^2$  между каждой парой векторов  $P_C(D)$ . Процент  $RR$  тогда является искомым значением для  $\epsilon$  (например, для  $RR = 0,1$  порог  $\epsilon$  определяется  $\epsilon = D$  с  $P_C(D) = 0,1$ ). Еще можно зафиксировать количество соседей для каждой точки траектории. В таком случае порог вообще разный для каждой точки траектории, т.е.  $\epsilon = \epsilon(\bar{x}_i) = \epsilon_i$ . Преимущества обоих методов состоит в сохранении густоты рекуррентных точек и возможности объединения RP разных систем без необходимости предварительного нормирования временных рядов.

### **3.2. МЕРЫ СЛОЖНОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР РЕКУРРЕНТНЫХ ГРАФИКОВ**

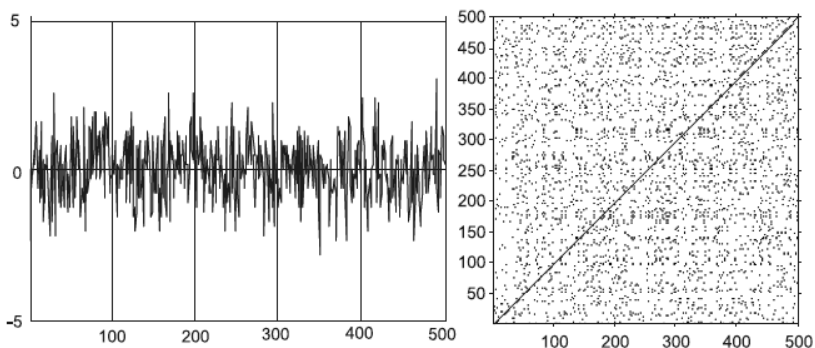
Основным преимуществом рекуррентных графиков является способность визуализировать многомерные фазовые траектории, даже в случае коротких и нестационарных данных, а по виду гео-

метрических структур можно проследить эволюцию во времени анализируемого процесса.

Поскольку рекуррентные графики являются графическим инструментом, то можно выявить ряд основных структур, отвечающих за тот или иной характер развития системы. Еще в своей первой работе по рекуррентным графикам Экман [102] предложил два основных класса структур: топология и текстура. При этом топология отвечает крупномасштабным структурам на графиках и подразделяется на следующие подвиды.

1. Однородная топология. Она характерна для стационарных и автономных динамических систем, если все характеристические времена (времена релаксации) малы в отношении длины ряда, т.е. по сравнению с интервалом времени, задействованном в построении рекуррентного графика (рис. 3.3).

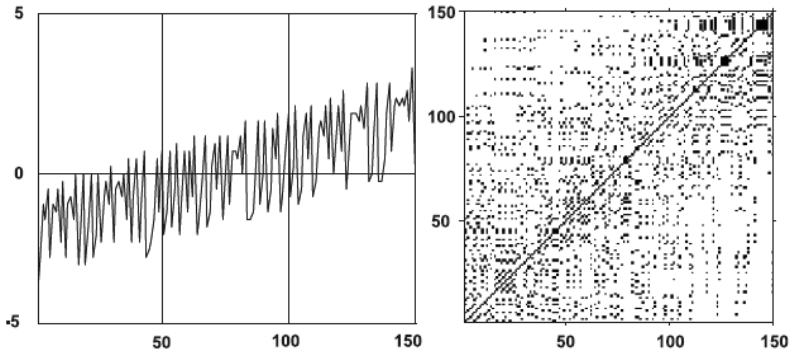
Здесь длина ряда 1000, размерность вложения и запаздывание по времени не используются,  $\epsilon = 0,1$ .



**Рис. 3.3.** Структура рекуррентности в случае однородной топологии для серии случайных чисел

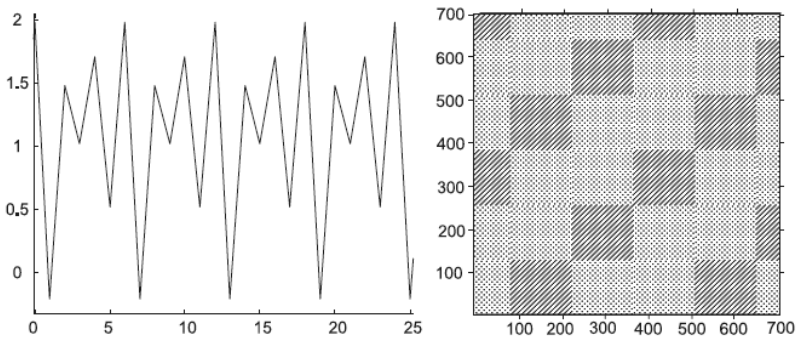
2. Дрейф. Этот вид структуры характерен для динамических систем, не обладающих однородностью, но содержащих адиабатически (медленно) меняющиеся параметры. На рекуррентном графике данный факт отмечается характерным изменением яркости изображения от нижнего правого и верхнего левого углов (рис. 3.4).

Здесь  $X[n+1] = (1+a)X[n] - aX^2[n]$ , при  $a = 3$ , с наложенной линейно растущей последовательностью. Длина ряда 150, размерность вложения и запаздывание по времени не используются,  $\epsilon = 0,1$ .



**Рис. 3.4.** Топология дрейфа для логистического отображения

3. Осциллирующие системы на рекуррентных графиках отображаются через диагонально ориентированные, периодические структуры — диагональные линии и структуры, напоминающие шахматную доску (рис. 3.5).

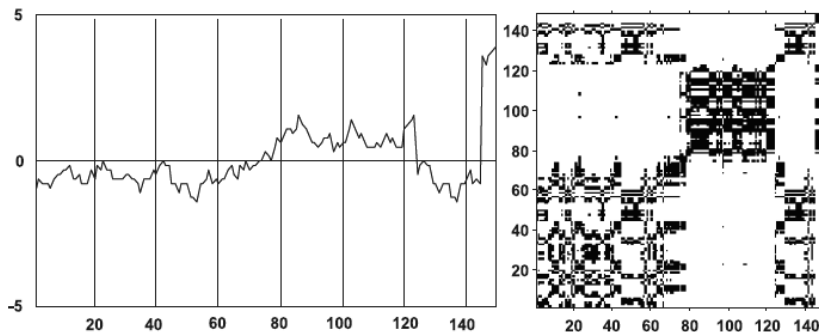


**Рис. 3.5.** Топология рекуррентности для осциллирующего поведения системы

Здесь логистическое отображение  $X[n + 1] = (1 + a)X[n] - aX^2[n]$ , при  $a = 1,7289$ , демонстрирующее шестипериодные колебания. Длина ряда 700, размерность вложения и запаздывание по времени не используются,  $\epsilon = 0,1$ .

4. Контрастная топология. Она характеризует резкие изменения динамики процесса, нестационарность, вследствие чего появляются характерно выраженные белые зоны в структуре рекуррентного графика (рис. 3.6). Основываясь на частоте рекуррентностей таких

экстремальных и редких событий, по графику можно отследить и оценить их.



**Рис. 3.6.** Контрастная топология разрывного броуновского движения

Длина ряда 400, размерность вложения и запаздывание по времени не используются,  $\epsilon = 0,2$ .

Геометрические структуры рекуррентных графиков, относящихся к классу текстур, характеризуются малыми масштабами. К ним относятся следующие случаи.

1. Отдельные точки в структуре рекуррентного графика характеризуют «редкие состояния», непродолжительно существующие во времени или подверженные сильным флуктуациям. Если график полностью состоит из отдельных точек, то процесс является случайным (рис. 3.3).

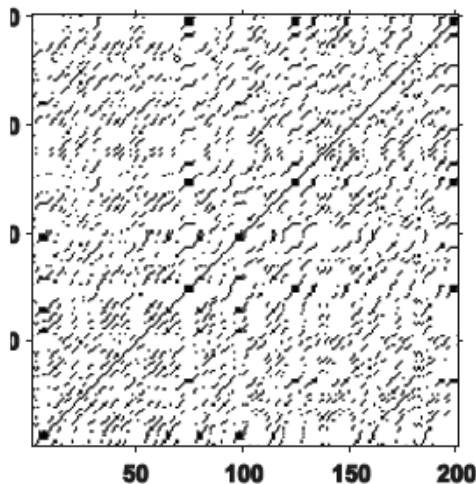
2. Диагональные линии. Математическое определение диагональных линий имеет следующий вид:

$$R_{i+k, j+k} = 1, k = \overline{1, l},$$

где  $l$  — длина диагональной линии.

Такая структура соответствует ситуации, когда некая часть фазовой траектории пролегает параллельно другой. Иными словами, рассматриваемая траектория повторяет саму себя, проходя по одной и той же области фазового пространства в различные отрезки времени. Характер диагональной линии определяет эволюцию процесса. Так, длина ее соответствует временному масштабу локальной близости участков траектории, а наклон — временному разнесению, направлению последовательности состояний данных участков временного ряда и характеризует внутреннее время взаимодействующих подпроцессов. Если диагональные линии паралл-

лельны главной диагонали, значит траектории параллельны друг другу в одинаковые отрезки внутреннего времени для двух данных частей траектории (рис. 3.5). Если же они перпендикулярны главной диагонали, то направление их развития противоположно, т.е. один из подпроцессов будто отражен в зеркале. Однако нерегулярное проявление диагональных линий характеризует хаотический процесс (рис. 3.7).



**Рис. 3.7.** Текстура рекуррентности в случае хаотического поведения системы

Здесь логистическое отображение  $X[n + 1] = (1 + a) X[n] - a X^2[n]$ , при  $a = 3$ . Длина ряда 200, размерность вложения и запаздывание по времени не используются,  $\epsilon = 0,1$ .

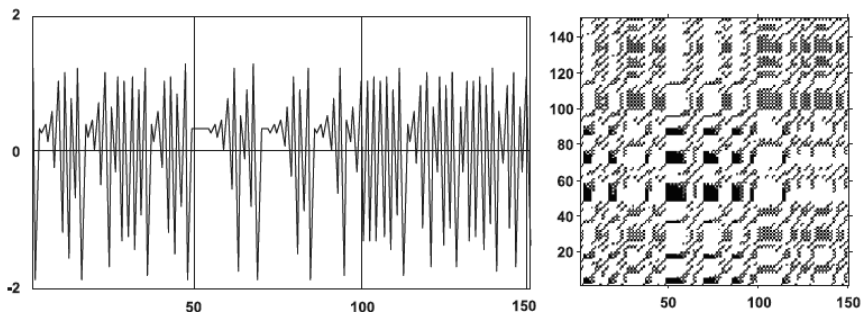
3. Вертикальные (горизонтальные) линии и их скопления имеют такую математическую интерпретацию:

$$R_{i, j-k} = 1, k = \overline{1, v},$$

где  $v$  — длина горизонтальной линии.

Вертикальные линии соответствуют интервалам времени, в течение которых состояние системы не меняется или меняется очень незначительно, будто система остается замороженной на некоторое время. Это явление называется ламинарностью (рис. 3.8).

Здесь логистическое отображение  $X[n + 1] = (1 + a) X[n] - a X^2[n]$ , при  $a = 2,679$ . Длина ряда 150, размерность вложения и запаздывание по времени не используются,  $\epsilon = 0,2$ .



**Рис. 3.8.** Ламинарный характер поведения системы

Нерегулярное появление черных зон, соответствующих скоплениям вертикальных и горизонтальных линий, а также белых зон, указывает на нерегулярность процесса, который может означать, например, коррелированность шумов (рис. 3.6).

В общем случае линейные структуры рекуррентных графиков представляют собой локальную временную связь между текущими сегментами траектории.

Несмотря на предложенную четкую классификацию, в реальных данных всегда присутствует шум, зачастую столь значительный, что анализ картины рекуррентного графика требует определенного опыта и приобретает уже оттенок искусства.

### 3.3. ЛОКАЛЬНЫЙ НАКЛОН ЛИНЕЙНОЙ СТРУКТУРЫ

В общем случае всевозможные линейные структуры рекуррентных графиков говорят о локальном временном подобии некоторых сегментов траектории [115]. Диагональ указывает на близость участков фазовой траектории  $\vec{x}(T_1(t))$  и  $\vec{x}(T_2(t))$ . Здесь  $\vec{x}(T_1(t))$  и  $\vec{x}(T_2(t))$  — две локальные временные шкалы или шкалы внутреннего локального времени, вырезанные из абсолютной шкалы времени таким образом, что  $\vec{x}(T_1(t)) \approx \vec{x}(T_2(t))$  в течение некоторого времени  $t = \overline{1, l}$ . При некоторых условиях, например, при условии кусочно-линейной обратимости  $T(t)$ , линия на полотне рекуррентного графика может быть математически выражена как функция трансформации времени:

$$\vartheta(t) = T_2^{-1}(T_1(t)).$$

Кроме того, локальный наклон линейной структуры представляет собой локальную производную  $\partial_t$  обращенной внутренней

временной шкалы второго участка фазовой траектории  $T_2^{-1}(t)$  как функции от внутренней временной шкалы первого участка  $T_1(t)$ :

$$b(t) = \partial T_2^{-1}(T_1(t)) = \partial_t \vartheta(t).$$

Зная наклон  $b(t)$  линии на рекуррентном графике, можно установить связь между сегментами фазовой траектории:  $\vartheta(t) = \int b(t) dt$ .

В качестве иллюстрации рассмотрим несколько примеров из работы Марвана и Куртса по трансформации внутреннего времени процессов  $f(t) = t^2$  и  $f(t) = \sin(\pi t)$  [115]. К выбранным сегментам фазовых траекторий  $f_1$  и  $f_2$  применяются следующие временные трансформации (таблица 3.1).

Таблица 3.1

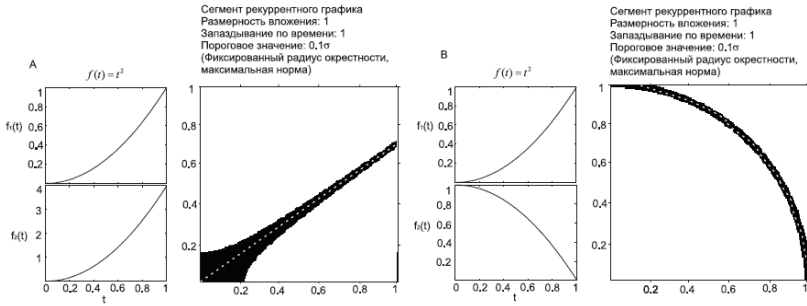
**Типы трансформаций**

№ рис.	$T_1(t)$	$T_2(t)$	$b(t)$	$\vartheta(t)$
Рис. 3.9 (А) Рис. 3.10 (А)	$t$	$2t$	0,5	$0,5t$
Рис. 3.9 (В) Рис. 3.10 (В)	$t$	$\sqrt{1-t^2}$	$\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$	$\sqrt{1-t^2}$

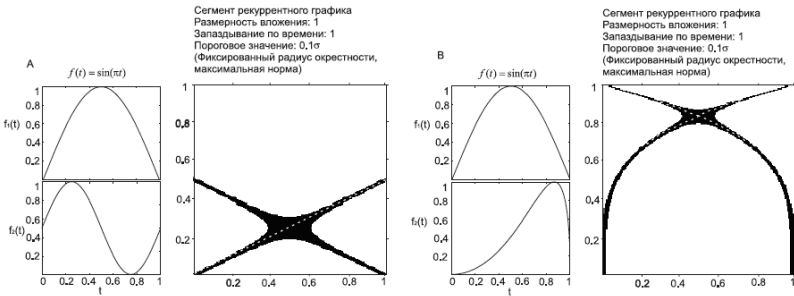
На представленных ниже рисунках изображены сегменты рекуррентных графиков для этих участков фазовых траекторий  $f_1$  и  $f_2$ . Это именно малые части рекуррентных графиков, а не целый их вид, поскольку полные рекуррентные графики не могут содержать только эти структуры, так как обязательно должна присутствовать линия тождественности и наблюдаемая рекуррентная картина должна быть более симметричной относительно главной диагонали (рис. 3.9, 3.10). Такой анализ взаимосвязи фазовых сегментов особенно важен, если они принадлежат к различным фазовым траекториям, т.е. в случае кросс-рекуррентного анализа.

На рис. 3.9  $f(t) = t^2$ , чьи подсекции  $f_1$  и  $f_2$  испытывают различные трансформации внутреннего локального времени (в соответствии с таблицей 3.1). Сегменты выбраны таким образом, что именно в эти моменты  $f_1(t) \approx f_2(t)$  штрихпунктирные линии соответствуют функциям трансформации времени  $\vartheta(t)$ .

На рис. 3.10  $f(t) = \sin(\pi t)$ , чьи подсекции  $f_1$  и  $f_2$  испытывают различные трансформации внутреннего локального времени (в соответствии с таблицей 3.1). Сегменты выбраны таким образом, что именно в эти моменты  $f_1(t) \approx f_2(t)$  штрихпунктирные линии соответствуют функциям трансформации времени  $\vartheta(t)$ .



**Рис. 3.9.** Сегменты рекуррентных диаграмм для фазовой траектории



**Рис. 3.10.** Сегменты рекуррентных диаграмм для фазовой траектории

### 3.4. МЕРЫ РЕКУРРЕНТНОСТИ

Количественный анализ рекуррентных графиков основан на подсчете перечисленных выше элементов рекуррентного графика в некоторых соотношениях. При анализе линий используются частотные и кумулятивные распределения длин линий. В настоящее время стандартный набор составляют меры RR — показатель рекуррентности, DET — детерминизм, L — средняя длина диагональных линий, Lmax или DIV — максимальная длина диагональной линии или ее инверсия, ENTR — энтропия, которая соотносится с энтропией Шеннона длин диагональных линий и отражает сложность детерминистской структуры системы, RATIO — соотношение между DET и RR, TREND — тренд, который отражает нестационарность системы, в особенности дрейф, LAM — уровень ламинарности, TT — средняя длина горизонтальных и вертикальных линий [134].



Дадим формальное определение вышеперечисленных мер. Для этих целей вначале введем следующие обозначения [77]:

$$R_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j) \text{ рекуррентны,} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$D_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j) \text{ и } (i+1, j+1) \text{ или } (i-1, j-1) \text{ рекуррентны,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теперь определим коэффициенты самоподобия и предсказуемости (детерминизма) следующим образом:

$$RR = \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_{ij},$$

$$DET = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N D_{ij}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_{ij}}.$$

Если  $N_i$  — количество диагональных линий, а  $l_i$  — длина  $i$ -й диагональной линии, то длина самой длинной линии определяется выражением

$$L = \max_i l_i.$$

Тогда энтропия для распределения  $p(l)$  длины диагональных линий может быть определена на основе энтропии Шеннона по формуле

$$ENTR = - \sum_{l=1}^{N_i} p(l) \cdot \ln p(l).$$

Диагональная линия идентификации (ЛИ) длины  $l$  означает, что сегмент траектории близок в течение  $l$  интервалов времени к другому сегменту траектории в другой период времени. Поэтому эти линии связаны с дивергенцией сегментов траектории. Средняя длина диагональной линии

$$L = \frac{\sum_{l=l_{\min}}^N l \cdot P(l)}{\sum_{l=l_{\min}}^N P(l)}$$

является средним временем, когда два сегмента траектории близки друг к другу, и может быть интерпретирована как среднее время прогноза.

Предшествующие меры относятся к диагональным (горизонтальным) линиям на рекуррентной диаграмме. В то же время существуют вертикальные линии с соответствующими мерами. Так, полное количество вертикальных линий длины  $v$  в RP определяется гистограммой

$$P(v) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (1-R_{ij}) \cdot (1-R_{i,j+v}) \cdot \prod_{k=0}^{v-1} R_{i,j+k}.$$

Аналогично определению детерминизма, отношение рекуррентных точек, которые формируют вертикальные структуры, к полному набору рекуррентных точек может быть вычислено следующим образом:

$$\text{LAM} = \frac{\sum_{v=v_{\min}}^N v \cdot P(v)}{\sum_{v=1}^N v \cdot P(v)}.$$

Эта мера называется ламинарностью (laminarity). Вычисления LAM производятся для тех  $v$ , которые превышают минимальную длину  $v_{\min}$ . Для рекуррентных диаграмм часто принимают  $v_{\min} = 2$ . Величина LAM уменьшается, если RP состоит из более одиночных рекуррентных точек, чем вертикальные структуры.

Средняя длина вертикальных структур определяется выражением

$$\text{TT} = \frac{\sum_{v=v_{\min}}^N v \cdot P(v)}{\sum_{v=v_{\min}}^N P(v)}$$

и называется временем задержки (захвата). Его вычисление требует также рассмотрения минимальной длины  $v_{\min}$ , как и в случае

с LAM. ТТ оценивает среднее время, в течение которого система находится в определенном состоянии, или как долго это состояние будет захвачено.

В контрасте с количественными мерами, основанными на диагональных линиях, введенные меры могут использоваться для анализа переходов «хаос — хаос». Последние два параметра характеризуют два разных типичных интервала времени, в течение которых траектории находятся в окрестности  $\epsilon$ . Их оконная динамика позволяет отследить временную компоненту рекуррентных диаграмм.

Следует отметить, что рекуррентный анализ может быть использован для прогнозирования кризисных явлений [79, 127], а в статье украинских ученых А.В. Батыр, В.Н. Соловьева и В.В. Щербы [4] показаны преимущества рекуррентных и энтропийных мер сложности экономических систем, которые могут служить надежными индикаторами-предвестниками кризисных ситуаций.

Из рекуррентных диаграмм также могут быть вычислены динамические инварианты: энтропия Реньи второго порядка и корреляционная размерность как функции от  $\epsilon$ .

Вычисление мер количественного анализа в окне, смещаемом вдоль главной диагонали RP, дает нам представление об эволюции этих мер во времени.

Для того чтобы рассмотреть возможности применения рекуррентного анализа временных рядов, рассмотрим подход моделирования сложных динамических систем, предложенный В.Б. Киселевым [23].

В литературе приводятся различные обобщенные схемы процесса математического моделирования, которые в целом сводятся к следующей последовательности действий:

- получение и анализ временных рядов наблюдений, постановка задачи;
- формулирование аналитической модели на языке отрасли науки;
- выбор структуры модели: тип уравнений, вид функций, установление связи переменных с наблюдаемыми величинами;
- настройка модели: расчет или подбор параметров;
- верификация модели (проверка ее адекватности или эффективности);
- использование.

На первом этапе исследователь сталкивается с полученными результатами наблюдений в виде временных рядов

$$\{\bar{u}_i\}_1^N \equiv \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_N\},$$

где  $\bar{u}_i = \bar{u}(t_i)$ ,  $t_i = i \cdot \Delta t$ ,  $N$  — длина ряда (число наблюдений),  $\Delta t$  — интервал выборки. Векторная форма записи подразумевает потенциальную многомерность ряда, хотя зачастую исследователь имеет дело с одномерным рядом  $\{\bar{u}_i\}_1^N$ , так как при исследовании сложных систем зачастую нет информации обо всех переменных состояния либо не все из них возможно измерить.

Второй этап подразумевает формулирование словесного описания модели с учетом полученных при исследовании временных рядов данных и некоторой априорной информации об исследуемой системе, известной заранее.

На третьем этапе осуществляется математическая формализация модели. Для конечномерных детерминированных моделей это, например, разностные уравнения (отображения) вида  $\bar{x}_{n+1} = \bar{F}(\bar{x}_n, \bar{c})$  или обыкновенные дифференциальные уравнения вида  $\dot{\bar{x}} = \bar{F}(\bar{x}, \bar{c})$ , где  $\bar{x}$  —  $d$ -мерный вектор состояния,  $\bar{F}$  — вектор-функция,  $\bar{c}$  —  $p$ -мерный вектор параметров,  $n$  — дискретное время (во втором случае речь идет о непрерывном времени). Таким образом, на данном этапе осуществляется выбор типа и числа уравнений, задается вид входящих в уравнения функций (компонент  $\bar{F}$ ) и динамических переменных (компонент  $\bar{x}$ ). В качестве переменных могут использоваться непосредственно наблюдаемые величины  $\bar{x} \equiv \bar{u}$ , но в общем случае также следует определить связь между ними:  $\bar{u} = h(\bar{x})$ , где  $h(\bullet)$  — измерительная функция.

На четвертом этапе осуществляется настройка модели путем выбора значений вектора параметров  $\bar{c}$ . В общем случае эта операция описывается поиском экстремального значения некоторой целевой функции, на практике может осуществляться как ручной подгонкой, так и вычислением, исходя из требования соответствия решения модельного уравнения имеющемуся наблюдению.

Верификация модели — пятый этап — проводится в зависимости от конечных целей моделирования: прогнозирование поведения системы (основной критерий — эффективность) или получения адекватной модели для изучения (основной критерий — адекватность). Признание модели удовлетворительной позволяет перейти к ее непосредственному использованию. В противном случае модель приходится дорабатывать, начиная с любого из перечисленных этапов. Более того, в зависимости от получаемых проме-

жуточных результатов доработка может потребоваться и на более ранних этапах построения математической модели.

Исходная точка процесса построения математической модели может начинаться с любого из этапов с первого по четвертый, с увеличением сложности процесса в целом от достаточно определенного на четвертом этапе (задача о «прозрачном ящике») до состояния практически полной неизвестности на первом этапе (задача о «черном ящике»).

Очевидно, что средства анализа временных рядов занимают важное место на этапах эмпирического построения математической модели и играют важную роль в получении качественных результатов. Развитие теории нелинейной динамики и хаоса укрепило понимание преимущественно нелинейной сущности природных явлений, и потому моделирование в последние годы осуществляется в основном с использованием нелинейных разностных и дифференциальных уравнений различной размерности. Однако большинство методов нелинейного анализа требуют либо достаточно длинных, либо стационарных рядов данных, которые далеко не всегда возможно получить при исследовании реальных систем. Более того, было показано, что данные методы дают удовлетворительные результаты, как правило, для идеализированных моделей реальных систем, что делает их малопригодными для исследований исходных временных рядов.

По полученному в результате наблюдений временному ряду  $\{\bar{u}_i\}_1^N$  можно судить о свойствах и поведении системы на основании построенного графического изображения траектории в соответствующем фазовом пространстве (периодические или хаотические системы имеют портреты характерного вида). Однако при размерностях более 3 такой анализ весьма затруднен по очевидным причинам, так как необходимо строить проекции в двух и/или трехмерные подпространства.

Связь результатов наблюдений с переменными состояния и модельными уравнениями в общем случае осложнена шумами. Так, для одномерного отображения  $x_{n+1} = F(x_n + \xi_n, c)$  и  $u_n = x_n + \zeta_n$ , где  $\xi_n$  — динамический шум (т.е. влияющий на динамику системы), а  $\zeta_n$  — измерительный шум (т.е. влияющий на результаты измерений). Таким образом, точное решение ставящейся в процессе отладки модели задачи о нахождении вектора параметров  $\bar{c}$  возможно лишь в идеальном случае  $\xi_n \equiv \zeta_n \equiv 0$ , что в реальных исследованиях является практически нереализуемым сценарием.

Если объединить в одном фазовом пространстве две траектории  $\{\bar{x}_i^d\}_1^{N_x}$  и  $\{\bar{y}_i^d\}_1^{N_y}$ , то сравнение попадания всех точек второй траектории в  $\varepsilon$ -окрестность всех точек первой траектории даст нам кросс-рекуррентную диаграмму (cross recurrence plot, далее CRP):

$$\text{CR}_{ij} = \theta(\varepsilon - \|\bar{x}_i - \bar{y}_j\|), \bar{x}_i \in \mathbf{R}^m, i = \overline{1, N_x}, \bar{y}_j \in \mathbf{R}^m, j = \overline{1, N_y},$$

где попадание точки  $\bar{y}_j$  в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $\bar{x}_i$  отмечается на диаграмме черной точкой в позиции  $(i, j)$ . Чтобы такая диаграмма имела смысл, переменные состояния обоих траекторий должны совпадать (так как находятся в одном фазовом пространстве) и быть взятыми от одной системы (это требование распространяется и на исходные временные ряды в случае реконструкции фазового пространства). Так как  $\text{CR}_{ii} = \{0; 1\}$ , то главная диагональ, как правило, размывается.

Диагональные структуры CRP отражают подобную эволюцию двух изучаемых траекторий в течение некоторого времени. По смещению и наклону диагоналей относительно главной диагонали можно судить о фазовом сдвиге и соотношении частот исследуемых сигналов. Эти эффекты лежат в основе методики синхронизации двух временных рядов. Следует отметить, что CRP не является рекуррентной диаграммой в буквальном смысле слова.

Меры количественного рекуррентного анализа также применимы и к анализу CRP. Однако если исследуются два ярко выраженных колебательных (т.е. детерминистских) процесса разной частоты, то угол наклона диагоналей к осям координат будет отличен от  $\pi/4$ , что приведет к уменьшению значения меры DET соответственно увеличению разницы частот сигналов, т.е. к очевидно противоречивому результату.

Совместные рекуррентные диаграммы (joint recurrence plot, JRP) предназначены для совместного изучения двух процессов  $\{\bar{x}_i^{dx}\}_1^N$  и  $\{\bar{x}_j^{dy}\}_1^N$  путем объединения RP каждого из исследуемых процессов:

$$\text{JR}_{ij}^{\{x\},\{y\}} = \theta(\varepsilon^{\{x\}} - \|\bar{x}_i - \bar{x}_j\|) \cdot \theta(\varepsilon^{\{y\}} - \|\bar{y}_i - \bar{y}_j\|), i = \overline{1, N}, j = \overline{1, N}.$$

Данное выражение может быть обобщено для большего количества систем; более того, выражение для RP является его частным случаем. Когда точке траектории  $\{x\}$  в некоторое время  $i$  соседствует другая точка этой же траектории во время  $j$ , и одновременно

с этой точке траектории  $\{\bar{y}\}$  в некоторое время  $i$  соседствует другая ее точка во время  $j$ , на диаграмме появляется рекуррентная точка в соответствующей позиции:  $JR_{ij} = 1$ . Размерности  $d_X$  и  $d_Y$  могут не совпадать. Переменные состояния обеих систем могут иметь различную физическую природу и не должны быть синхронизированы между собой.

Среди специфических методов рекуррентных графиков можно выделить метод построения диаграммы невязок, предложенных В.Б. Киселевым. Суть метода сводится к следующему.

Совместные диаграммы отображают только те рекуррентные точки, что порождаются всеми рядами, участвующими в построении. Таким образом, выявляется общее в структуре рекуррентностей исследуемых рядов. В задачах, например, поиска синхронизации или настройки моделей находит применение определение несоответствия одного ряда другому. Несовпадение рекуррентного поведения одного процесса рекуррентному поведению другого процесса математически может быть записано следующим образом:

$$RR_{ij} = (1 - \theta(\epsilon^{(x)} - \|\bar{x}_i - \bar{x}_j\|)) \cdot \theta(\epsilon^{(y)} - \|\bar{y}_i - \bar{y}_j\|), \quad i = \overline{1, N}, j = \overline{1, N}.$$

Данная матрица именуется диаграммой рекуррентных невязок (recurrence residuals plot). Иными словами, матрица  $RR$  отображает несоответствие рекуррентных структур траектории  $\{\bar{y}\}$  рекуррентным структурам траектории  $\{\bar{x}\}$ . LOI на диаграмме невязок всегда представляет собой белую линию, т.к. согласно определению выполняется равенство  $(1 - R_{ii}^{(x)}) \cdot R_{ii}^{(y)} = 0$ .

Для количественной оценки уровня несоответствия используется стандартная мера  $RR = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N RR_{ij}$ . Проведен анализ реакции диаграмм невязок на наличие шумов, рассогласований сигналов по фазе и по частоте.

Рассмотренные методы рекуррентного анализа временных рядов позволяют сделать вывод о том, что данный инструментарий является достаточно развитым, обладает большим разнообразием количественных мер и различных вариаций, основанных на совместном анализе двух временных рядов (кросс-рекуррентный анализ и диаграммы невязок). Несмотря на то, что рекуррентные методы не могут рассматриваться как альтернатива применению энтропии в моделировании экономики, на наш взгляд, такие методы могут оказаться полезными в анализе динамики сложных экономических систем и применении энтропии. Точкой соприкосновения можно

рассматривать то, что получение нового рекуррентного представления временного ряда позволяет по-новому взглянуть на понятие структуры временного ряда и соответствующего порождающего процесса, а также на понятие энтропии. Поиск доказательств численной сопоставимости энтропии и количественных мер рекуррентного анализа является в данной области перспективным направлением и требует более детального анализа и исследования.



## Глава 4

# ПРИМЕНЕНИЕ ЭНТРОПИИ ДЛЯ ИГРОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Задачами моделирования процесса принятия управленческих решений в условиях неопределенности, конфликтности и обусловленного ими риска занимается, в частности, такой раздел математики, как «Теория игр и принятия статистических решений» [6]. В последние десятилетия методы теории игр во все большей мере проникают в экономику и предпринимательство, в управленческую практику. Как будет показано ниже, совместное применение энтропийного подхода и концепции теории игр позволяет расширить сферу применения теоретико-игрового моделирования экономики. Например, совместное применение энтропийного подхода и концепции теории игр в современной теории портфеля позволяет обобщить модель Марковица задачи поиска структуры эффективного портфеля на случай, когда неизвестны законы распределения вероятностей случайных величин, характеризующих нормы прибыли активов [68]. Сразу отметим, что если применение энтропийного подхода в естественнонаучных исследованиях предъявляет строгие требования к размерности системы (объему совокупности микросостояний), то в случае применения энтропии в экономико-математических исследованиях размерность не имеет принципиального значения.

Из обширной литературы, посвященной теории игр и теории принятия решений, их применению в экономике, отметим следующие работы: Р. Ауман, М. Машлер [99], Д. Блекуэлл, М.А. Гиршик [6], А. Вальд [9, 131], В.В. Витлинский, П.И. Верченко, А.В. Сигал, Я.С. Наконечный [18], Н.Н. Воробьев [12], М.В. Губко, Д.А. Новиков [16], Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн [116], Р.И. Трухаев [82], Дж. Харшаньи [106].

В разделе будут рассмотрены некоторые аспекты совместного применения энтропийного подхода и методов и моделей принятия управленческих решений об оптимизации распределения ресурсов, основанных на применении теории антагонистических игр. С экономической точки зрения распределение ресурсов представляет собой диверсификацию деятельности экономических объектов. Научной основой диверсификации является современная теория

портфеля. Начало современной теории портфеля было положено работами Г. Марковица [112, 113]. Суть подхода Марковица состоит в том, что он предложил рассматривать нормы прибыли активов и составленных из них портфелей как случайные величины. Корректность применения теории антагонистических игр для поиска структуры эффективного портфеля впервые была рассмотрена в 1998 году А.В. Сигалом в статье [75].

Напомним, что *норма прибыли актива* — это экономический показатель, равный выраженному в процентах отношению полной прибыли актива за некоторый период к стоимости актива на начало этого периода. *Реализованной нормой прибыли* называют норму прибыли, полученную собственником актива, если он действительно получил дивиденды и реализовал (продал) данный актив на рынке. На практике, говоря о норме прибыли актива, не всегда имеют в виду покупку актива и его дальнейшую реализацию. Если активы, которые принадлежат инвестору, не реализуются в конце каждого текущего периода, а лишь оцениваются по их рыночной стоимости, то соответствующие прибыли (убытки) и нормы прибыли называются «книжными» (*бухгалтерскими*, «бумажными»).

*Антагонистическими играми (АИ)* будем называть конечные игры двух лиц (игроков) с нулевой суммой. При этом будем различать два принципиально разных класса антагонистических игр. Первый — классические антагонистические игры (КАИ), представляющие собой АИ с полной информацией. Второй — неоклассические антагонистические игры (НАИ), представляющие собой АИ с неполной информацией.

Антагонистические игры принято называть матричными играми, так как любую такую игру однозначно задает ее платежная матрица (матрица выигрышей первого игрока). Неоклассические антагонистические игры представляют собой простейшее обобщение классических антагонистических игр. Главной особенностью неоклассической антагонистической игры является то, что ее платежная матрица известна частично.

#### **4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР**

Математическую теорию игр чаще всего интерпретируют как теорию конфликтных ситуаций, т.е. ситуаций, в которых принимают участие несколько сторон, интересы которых не совпадают. Теория игр — довольно сложная область знаний. В случае обращения к ней необходимо внимательно следить за корректностью применения теории игр и научно обосновывать эту корректность.

Весьма упрощенные подходы вызывают угрозу ошибки, в том числе принятия неверных управленческих решений.

Совместное применение энтропийного подхода и концепции теории АИ характеризуется теоретической и вычислительной простотой. Именно благодаря этому соответствующие модели легко могут быть реализованы (для задач большой размерности на компьютере) в экономической практике. Уже при первом систематическом изложении теории игр Дж. Нейманом и О. Моргенштерном в монографии [116] она была разработана ими как средство математического изучения явлений конкурентной экономики. Теорию АИ часто рассматривают как теорию принятия оптимальных решений в условиях неопределенности. Теоретико-игровые модели нашли широкое применение для решения задач оптимального распределения ресурсов экономических объектов между разными активами. Здесь и далее под экономическими объектами будем подразумевать любые предприятия всех форм собственности, прежде всего корпорации.

При соблюдении определенных требований решение соответствующей АИ позволяет найти структуру эффективного портфеля, т.е. портфеля, структура которого задает оптимальное по Парето решение соответствующей задачи двухкритериальной оптимизации. В большинстве случаев, если возможно корректное применение теоретико-игрового метода поиска структуры эффективного портфеля, то удастся найти структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска, измеренного дисперсией случайной величины (СВ), характеризующей норму прибыли портфеля. Это обусловлено особенностями теории АИ, в первую очередь тем, что решение АИ ориентирует лицо, принимающее решения (ЛПР), на предельно осторожное поведение.

Как правило, при помощи АИ моделируют ситуации, в которых интересы участников противоположны. В экономике же часто интересы разных сторон непротиворечивы, а порой и совпадают. По этой и некоторым другим причинам основной моделью принятия решений считается модель теории принятия статистических решений, которую будем называть статистической игрой. Основная заслуга в создании теории принятия статистических решений принадлежит А. Вальду [9, 131].

АИ представляет собой систему  $\Gamma \mathbf{R} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ , где  $\mathbf{I} = \{1; \dots; i; \dots; k\}$  — известное множество всех чистых стратегий первого игрока, занумерованных натуральными числами от 1 до  $k$ ,  $\mathbf{J} = \{1; \dots; j; \dots; n\}$  — известное множество всех чистых стратегий второго игрока, занумерованных натуральными числами от 1 до  $n$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$  —

полностью или частично известная платежная матрица АИ. Значение элемента  $r_{ij}$  платежной матрицы задает выигрыш первого игрока в ситуации  $(i, j)$ , т.е. в случае, когда в партии игры он применил свою чистую стратегию  $i$ , а второй игрок — свою чистую стратегию  $j$ . В каждой партии АИ значение проигрыша второго игрока совпадает со значением выигрыша первого игрока. Методы решения КАИ досконально изучены, хорошо известны и характеризуются относительной простотой реализации.

В теории игр принято считать справедливым *принцип определенности исхода партий игры*. Согласно этому принципу, если при повторении партий каждый из игроков применяет во всех проведенных партиях одну и ту же свою чистую стратегию, то в каждой проведенной партии каждый из игроков будет получать одни и те же по своим числовым значениям выигрыши (для каждого игрока — свое числовое значение выигрыша).

*Чистой стратегией* игрока называют альтернативные решения о его способе действий, который он может применять в одной отдельно взятой партии игры. *Смешанной стратегией* игрока называют такую его стратегию, которую он может применять при повторении партий игры, чередуя свои чистые стратегии от партии к партии в соответствии с выбранным законом распределения вероятностей применения чистых стратегий.

*Решение игры (в широком смысле)* — это рекомендация такого поведения (способа действий) игроков, которое позволяет каждому из них наилучшим образом достигнуть своих собственных целей (удовлетворить свои интересы). В некоторых случаях решение игры представляет собой набор исходов игры. Решением игры может быть и набор смешанных стратегий игроков, если применения только чистых стратегий игроков недостаточно. По мнению Н.Н. Воробьева, основными задачами теории игр можно считать следующие три: «выработку принципов оптимальности, установление их реализуемости (т.е. установление существования оптимальных в этом смысле ситуаций) и нахождение их реализаций» [12, с. 12]. Основными содержательными чертами оптимальности в применении к исходу или к множеству исходов конфликта являются интуитивные представления о выгодности, устойчивости и справедливости. Одной из ключевых форм реализаций представлений об оптимальности является понятие равновесия: ситуация является равновесной, если ни один из игроков не заинтересован в том, чтобы нарушить ее, т.е. отклониться от нее в одностороннем порядке.

Если при повторении партий игроки применяют свои смешанные стратегии, т.е. чередуют применение своих разных чистых стратегий, то выигрыши всех игроков представляют собой СВ. В этом случае в теории игр принято считать, что перед началом очередной партии каждый игрок бросает соответствующий жребий и выбирает ту свою стратегию, на которую указал жребий. При этом все игроки не знают наперед результаты случайных жеребьевок и то, какие именно свои чистые стратегии они применяют в данной партии в соответствии с результатами своих жеребьевок.

При повторении партий ожидаемые выигрыши игроков численно задаются значениями математических ожиданий соответствующих СВ. *Нормальной* (или *стратегической*) *формой игры* называют совокупность функций, которые задают зависимость значений ожидаемых выигрышей игроков от применяемых ими стратегий. Вообще говоря, платежная матрица  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$  однозначно определяет нормальную форму соответствующей АИ  $\Gamma\mathbf{R} = \langle I, J, \mathbf{R} \rangle$ .

Как отмечалось выше, будем различать два принципиально разных класса АИ. Первый — классические АИ (КАИ), представляющие собой АИ, заданные полностью известной матрицей. Второй — неклассические АИ (НАИ), заданные частично известной матрицей. То, что платежная матрица известна частично, означает, что среди элементов  $r_{ij}$  матрицы  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$  имеется хотя бы один элемент, точное истинное значение которого неизвестно. Очевидно, КАИ является АИ с полной информацией, а НАИ — АИ с неполной информацией, при этом НАИ представляет собой простейшее обобщение КАИ. Применение НАИ позволяет адекватно моделировать процесс принятия управленческих решений с учетом хаотичности, противоречивости, неопределенности, неполноты информации, конфликтности, многокритериальности, альтернативности и обусловленного ими экономического риска.

Сразу отметим одну очевидную особенность НАИ: для них принцип определенности исхода партий игры, вообще говоря, может нарушаться. Действительно, если точное истинное значение некоторого элемента  $r_{ij}$  платежной матрицы игры неизвестно, а при повторении партий первый игрок применяет свою чистую стратегию  $i$ , а второй игрок — свою чистую стратегию  $j$ , то в каждой проведенной партии каждый из игроков может получать разные по своим числовым значениям выигрыши, так как значение элемента  $r_{ij}$  может меняться от партии к партии.

Статистическая игра (статистическая модель принятия решений) представляет собой систему  $\Gamma\mathbf{R} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ , где  $\mathbf{I} = \{1; \dots; i; \dots; k\}$  — известное множество всех решений ЛПР (в теории принятия статистических решений ЛПР еще принято называть статистиком), которые он может применить при одноразовом принятии управленческого решения,  $\mathbf{J} = \{1; \dots; j; \dots; n\}$  — известное множество всех возможных состояний «природы» (экономической среды),  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$  — полностью или частично известная платежная матрица, еще называемая функционалом оценивания статистической игры.

Оптимальная (возможно, смешанная) стратегия ЛПР — это такая стратегия ЛПР из множества всех его возможных стратегий, которую само ЛПР считает наилучшей согласно структуре его собственных предпочтений и согласно имеющейся у него информации. В этом случае теория статистических решений дает возможность строить процедуры, позволяющие ЛПР формализовать его предпочтения, при этом принятие решений сводится к сравнению значений тех показателей полезности, которые положены в основу оценки эффективности решений. Качество процесса принятия решений зависит от полноты учета всех факторов, существенных с точки зрения возможных последствий реализации принятых управленческих решений.

Чистая стратегия ЛПР — это решение ЛПР, которое он может применить при одноразовом принятии управленческих решений. Сразу отметим, что чистые стратегии ЛПР могут быть его взаимоисключающими возможными решениями, а могут быть в определенном смысле совместимыми. Состояния «природы», как правило, являются взаимоисключающими, при этом неизвестно, в каком именно своем возможном состоянии будет находиться «природа» в момент реализации принятого ЛПР управленческого решения. В отличие от ЛПР, «природа» пассивно выбирает свои чистые стратегии, т.е. случайным образом (неосознанно) оказывается в одном из своих возможных состояний.

Без ограничения общности можно считать, что платежная матрица статистической игры обладает положительным ингредиентом [82, с. 12]:  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^+ = \mathbf{R}_{k \times n}^+ = (r_{ij}^+)$ , т.е. значение элемента  $r_{ij}$  характеризует выигрыш ЛПР (например, его прибыль или доход) в случае реализации им своего  $i$ -го решения в условиях, когда «природа» оказалась в своем  $j$ -м возможном состоянии, поэтому ЛПР стремится максимизировать значения оценок  $r_{ij}$  реализаций им своих решений.

Статистическую игру, моделирующую процесс принятия управленческих решений, можно решать как в чистых стратегиях игроков, так и в их смешанных стратегиях. Для поиска оптимальной стратегии ЛПР можно решать АИ, платежная матрица которой совпадает с функционалом оценивания  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$  заданной статистической игры. Далее будем отождествлять исходную статистическую игру с соответствующей АИ, т.е. с АИ, заданной той же самой платежной матрицей. В этом случае соответствующую АИ можно называть *АИ, характеризующей процесс принятия управленческих решений*. Образно говоря, в таком случае АИ используется как высокотехнологический инструмент поиска оптимального управленческого решения. При этом экономические интерпретации компонент оптимальных стратегий игроков, цены соответствующей АИ и их найденных числовых значений зависят от экономического содержания исходного процесса принятия управленческих решений.

С одной стороны, такое отождествление позволяет расширить возможности применения статистических игр в экономике, существенно упростить процесс принятия управленческих решений и уменьшить стоимость этого процесса. С другой стороны, такое отождествление требует от ЛПР определенной осторожности и корректности. Вообще, корректное теоретико-игровое моделирование экономики требует выполнения определенных предпосылок [72, с. 242–243]. В случае, когда нарушено хотя бы одно из этих требований, применение теории игр для моделирования экономики нецелесообразно, а во многих случаях невозможно в принципе. Применение теории игр в условиях, когда нарушено хотя бы одно из этих требований, почти наверняка приведет к неверным выводам, принятию и реализации неоптимального управленческого решения. Поэтому, применяя АИ для принятия управленческих решений в экономике, следует уделять внимание вопросам математической корректности, экономической корректности, экономической целесообразности и экономической эффективности.

Существенной особенностью теории принятия статистических решений является то, что в этой теории рассматриваются эксперименты, состоящие из многих стадий, а не из одной стадии, когда фиксируется число наблюдений, и изучаются общие статистические проблемы, в которых статистик (ЛПР) должен принять одно из многих решений. Отождествление исходной статистической игры с соответствующей АИ дает ряд преимуществ. Перечислим некоторые из этих преимуществ.

Отождествление статистической игры с соответствующей АИ позволяет выбрать одно оптимальное решение или упорядочить все имеющиеся чистые стратегии ЛПР. Более того, отождествление статистической игры с соответствующей АИ позволяет сформировать оптимальную смешанную стратегию ЛПР, если использование смешанных стратегий возможно и экономически целесообразно. Наконец, отождествление статистической игры с соответствующей АИ позволяет не проводить многошаговые эксперименты, что дает возможность ЛПР экономить ресурсы.

Предварительно остановимся на целесообразности применения смешанных стратегий игроков, так как их использование (в том числе и в экономике) часто критикуется. Некоторые исследователи придерживаются следующей точки зрения: «Применение смешанных стратегий подходит только для игр с большим числом повторений. Рассмотрим игру, которая должна быть сыграна лишь один раз. При использовании смешанных стратегий игрок должен выбирать свое решение на основании реализации случайного процесса, задаваемого распределением вероятности его смешанной стратегии. Однако эта реализация может дать стратегию, настолько «экзотическую», что ее применение в единичной игре будет малоэффективно, несмотря на теоретические обоснования эффективности такой смешанной стратегии в смысле среднего выигрыша на протяжении многих игр» [16, с. 61]. Основываясь на этом рассуждении, М.В. Губко и Д.А. Новиков дают следующую рекомендацию: «Поэтому, когда возможно, особенно при моделировании реальных систем, следует использовать только чистые стратегии» [16, с. 61].

С этим мнением трудно согласиться. Как будет показано далее, возможны экономические интерпретации оптимальных решений игр, в том числе и оптимальных смешанных стратегий игроков. Более того, решение игры в смешанных стратегиях, как правило, расширяет возможности применения теории игр для принятия управленческих решений в экономике. Наконец, принятие управленческих решений, принятых на основе решения АИ, характеризующей процесс принятия управленческих решений, позволяет учесть противоречивость, неопределенность, неполноту информации, конфликтность, многокритериальность, альтернативность и обусловленный ими экономический риск, а также оптимизировать уровень экономического риска.

Стратегию поведения «природы» определяет имеющая место информационная ситуация (ИС). Существуют разные классификации ИС, характеризующие стратегию поведения «природы».



В классификации, предложенной Р.И. Трухаевым [82, с. 13], выделяется семь ИС. Общепринятая классификация выделяет лишь три случая [81, с. 514]. Первый случай — это принятие решений в условиях определенности, когда данные известны точно. Вторым случаем — это принятие решений в условиях риска, когда данные можно представить вероятностными моделями (первая ИС в классификации Трухаева). Третьим случаем — это принятие решений в условиях неопределенности, когда имеющиеся данные трудно или невозможно классифицировать по степени их значимости (четвертая ИС в классификации Трухаева). Главным преимуществом предложенной Р.И. Трухаевым классификации ИС является бóльшая (по сравнению с общепринятой) детализация возможных ситуаций. Эта детализация позволяет точнее выбрать критерий принятия решений, лучше учитывать особенности имеющей место ситуации, качественнее учитывать неопределенность, конфликтность и обусловленный ими экономический риск.

Введем следующие обозначения:  $\mathbf{p} = (p_1; \dots; p_i; \dots; p_k)$  — вектор, характеризующий вероятности применения первым игроком своих чистых стратегий при повторении партий,  $\mathbf{q} = (q_1; \dots; q_j; \dots; q_n)$  — вектор, характеризующий вероятности применения вторым игроком своих чистых стратегий при повторении партий;

$V = V(\mathbf{p}; \mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{q}^T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot p_i \cdot q_j$  — платежная функция АИ, где

$\mathbf{q}^T$  — вектор, транспонированный к вектору  $\mathbf{q}$ .

Векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  могут характеризовать как чистые, так и смешанные стратегии игроков. Если одна из компонент вектора  $\mathbf{p}$  (или  $\mathbf{q}$ ) равна числу 1, а все остальные его компоненты — числу 0, то такой вектор характеризует чистую стратегию соответствующего игрока, когда при повторении партий этот игрок каждый раз применяет одну и ту же свою чистую стратегию.

Далее везде в АИ будем отождествлять стратегию  $s_l \in \mathbf{S}_l$ ,  $l = \overline{1, 2}$ , игрока  $l$  с соответствующим вектором, который характеризует вероятности применения согласно этой стратегии соответствующим игроком своих чистых стратегий при повторении партий. В этих обозначениях для АИ множества  $\mathbf{S}_l$  стратегий игроков следует отождествлять с такими множествами:

$$\mathbf{S}_1 = \left\{ \mathbf{p} = (p_1; \dots; p_i; \dots; p_k) \left| \sum_{i=1}^k p_i = 1, p_i \geq 0, i = \overline{1, k} \right. \right\}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{S}_2 = \left\{ \mathbf{q} = (q_1; \dots; q_j; \dots; q_n) \left| \sum_{j=1}^n q_j = 1, q_j \geq 0, j = \overline{1, n} \right. \right\}. \quad (4.2)$$

Для АИ функция  $V_1(\mathbf{p}; \mathbf{q}) = V = V(\mathbf{p}; \mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{q}^T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot p_i \cdot q_j$  задает функцию выигрыша первого игрока (т.е. игрока 1), а функция  $V_2(\mathbf{p}; \mathbf{q}) = -V = -V(\mathbf{p}; \mathbf{q}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{q}^T = -\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot p_i \cdot q_j$  — функцию выигрыша второго игрока (т.е. игрока 2).

В АИ  $\mathbf{GR} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$  согласно принципу гарантированного результата (еще называемому принципом максимина или принципом минимакса) первый игрок стремится обеспечить себе свой максимальный выигрыш  $\max_{\mathbf{p} \in \mathcal{S}_1} \min_{\mathbf{q} \in \mathcal{S}_2} V(\mathbf{p}; \mathbf{q})$ , а второй игрок стремится обеспечить себе свой минимаксный проигрыш  $\min_{\mathbf{q} \in \mathcal{S}_2} \max_{\mathbf{p} \in \mathcal{S}_1} V(\mathbf{p}; \mathbf{q})$ .

Далее будем использовать такие обозначения:  $V_{1j} = \sum_{i=1}^k r_{ij} \cdot p_i$  — *ожидаемый выигрыш первого игрока*, если он придерживается своей стратегии  $\mathbf{p} \in \mathcal{S}_1$ , а второй игрок — своей  $j$ -й чистой стратегии, где  $j = \overline{1, n}$ ;  $V_{ii} = \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot q_j$  — *ожидаемый проигрыш второго игрока*, если он придерживается своей стратегии  $\mathbf{q} \in \mathcal{S}_2$ , а первый игрок — своей  $i$ -й чистой стратегии, где  $i = \overline{1, k}$ . Решение заданной АИ сводится к поиску оптимальных стратегий игроков, а также значения цены  $V_{\mathbf{R}}^*$  игры. Согласно определению ситуации равновесия и определениям множеств  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  компоненты любых векторов  $\mathbf{p} = (p_1, \dots; p_i, \dots; p_k)$ ,  $\mathbf{q} = (q_1, \dots; q_j, \dots; q_n)$ , характеризующих допустимые стратегии игроков, векторов  $\mathbf{p}^* = (p_1^*, \dots; p_i^*, \dots; p_k^*)$ ,  $\mathbf{q}^* = (q_1^*, \dots; q_j^*, \dots; q_n^*)$ , характеризующих их оптимальные стратегии, цена  $V_{\mathbf{R}}^*$  игры удовлетворяет

$$\sum_{i=1}^k p_i = 1, \quad (4.3)$$

$$p_i \geq 0, i = \overline{1, k}, \quad (4.4)$$

$$\sum_{j=1}^n q_j = 1, \quad (4.5)$$

$$q_j \geq 0, j = \overline{1, n}, \quad (4.6)$$

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot p_i \cdot q_j^* \leq V_{\mathbf{R}}^* = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot p_i^* \cdot q_j^* \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot p_i^* \cdot q_j, \quad (4.7)$$

при этом для компонент векторов, характеризующих оптимальные стратегии игроков, обязательно должны выполняться все соотношения (4.3) — (4.6).

Решить АИ означает найти оптимальные стратегии игроков и значение цены игры. В одних случаях АИ, заданная своей платежной матрицей  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$ , имеет решение в чистых стратегиях игроков (так называемая игра с седловой точкой), а в других случаях — АИ не имеет решения в чистых стратегиях игроков, т.е. она имеет решение в смешанных стратегиях игроков. Известно, что любая АИ имеет решение, возможно не единственное, при этом, если заданная АИ является игрой без седловой точки, то хотя бы у одного из игроков его оптимальная стратегия является смешанной стратегией.

В теории АИ используют такие обозначения:  $\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j r_{ij}$ ,  $\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i r_{ij}$  — нижняя и верхняя чистые цены игры;  $(\mathbf{p}^*; \mathbf{q}^*)$  — ситуация равновесия в АИ  $\Gamma \mathbf{R} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ ;  $V_{Ij}^* = \sum_{i=1}^k r_{ij} \cdot p_i^*$ ;  $V_{IIi}^* = \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot q_j^*$ ;  $V_{\mathbf{R}}^* = V(\mathbf{p}^*; \mathbf{q}^*)$ ;  $\text{supp } \mathbf{p}$ ,  $\text{supp } \mathbf{q}$  — спектры стратегий игроков. *Спектром стратегии*  $\mathbf{p} \in \mathbf{S}_1$  *первого игрока* называют множество  $\text{supp } \mathbf{p} = \{i \mid p_i > 0\}$ . *Спектром стратегии*  $\mathbf{q} \in \mathbf{S}_2$  *второго игрока* называют множество  $\text{supp } \mathbf{q} = \{j \mid q_j > 0\}$ .

Перечислим наиболее важные свойства оптимальных стратегий  $\mathbf{p}^*$ ,  $\mathbf{q}^*$  игроков и значения  $V_{\mathbf{R}}^*$  АИ  $\Gamma \mathbf{R} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ :

- 1)  $\alpha \leq V_{\mathbf{R}}^* \leq \beta$ ;
- 2)  $V_{IIi}^* \leq V_{\mathbf{R}}^*$ ,  $i = \overline{1, k}$ ;
- 3)  $V_{IIi}^* = V_{\mathbf{R}}^*$ , если  $i \in \text{supp } \mathbf{p}^*$ ;
- 4)  $V_{Ij}^* \geq V_{\mathbf{R}}^*$ ,  $j = \overline{1, n}$ ;
- 5)  $V_{Ij}^* = V_{\mathbf{R}}^*$ , если  $j \in \text{supp } \mathbf{q}^*$ .

Сформулируем важное свойство решения АИ, называемое *критерием оптимальности стратегий игроков*: пусть  $\mathbf{p} \in \mathbf{S}_1$  и  $\mathbf{q} \in \mathbf{S}_2$  — стратегии первого и второго игроков соответственно,  $V$  — число, для которых выполняются неравенства

$$V_{IIi} \leq V \leq V_{Ij}, \quad i = \overline{1, k}, j = \overline{1, n}, \quad (4.8)$$

где  $V_{Ij} = \sum_{i=1}^k r_{ij} \cdot p_i$ ,  $V_{IIi} = \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot q_j$ , тогда  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  — оптимальные стратегии игроков, а число  $V$  — значение цены АИ, заданной матрицей  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$ .

## 4.2. ОСНОВЫ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИКИ

Различные аспекты теоретико-игрового моделирования экономики и различные вопросы применения АИ для принятия управленческих решений достаточно подробно рассмотрены, например, в работах [72, 76]. Обсудим наиболее важные стороны теоретико-игрового моделирования процессов принятия управленческих решений в экономике.

Современной экономике внутренне присущи такие особенности, как хаотичность, неопределенность, конфликтность, конкуренция и обусловленный ими риск. Эти особенности экономики приводят к тому, что при теоретико-игровом моделировании экономики не для всех элементов платежной матрицы известны их точные истинные значения. В таких случаях следует применять НАИ. Кроме того, для расширения сферы применения АИ в экономико-математическом моделировании их целесообразно применять совместно с энтропийным подходом, теорией вероятностей и математической статистикой, теорией случайных процессов, эконометрией, нечеткой математикой, конкретной математикой и другими разделами математики.

Пусть процесс принятия управленческих решений характеризуется антагонистической игрой, соответствующая исходной статистической игре. В этом случае рассматриваемая АИ именно характеризует процесс принятия управленческих решений, при этом она не обязательно является моделью процесса принятия управленческих решений.

Очевидно, применение игр для принятия управленческих решений в экономике следует начинать с построения платежной матрицы, что является, по существу, наиболее трудоемким этапом подготовки принятия решений. Ошибки в платежной матрице не могут быть компенсированы никакими вычислительными методами и могут привести к неверному итоговому результату. Даже незначительные ошибки округления приводят к известной проблеме неопределенности исходной информации и расчетов на основе имеющихся изначально неточных исходных данных. Полностью избежать ошибок при вычислении значений элементов платежной матрицы невозможно. Если же при построении функционала оценивания допущены существенные ошибки, то тем более неизбежны трудности, проблемы и ошибки в процессе принятия управленческих решений.

В экономических исследованиях неопределенность значений элементов функционала оценивания может возникать и по другим причинам как объективного, так и субъективного характера. Например, при моделировании задачи выбора структуры портфеля эффективный портфель можно найти как решение АИ, заданной платежной матрицей, элементы которой представляют собой наблюдавшиеся значения норм прибыли выбранных активов [68]. Среди этих активов могут быть такие, которые недавно появились на рынке, поэтому для части активов точные истинные значения их норм прибыли для начальных периодов наблюдения неизвестны, поэтому соответствующая матрица известна частично. Применение НАИ позволяет в определенном смысле учесть и преодолеть такую неполноту информации. Более того, применение НАИ позволяет не только лучше учесть неопределенность, неполноту информации и обусловленный ими экономический риск, но и позволяет оптимизировать уровень экономического риска.

Итак, процесс принятия управленческих решений в экономике можно формально описать игрой, т.е. следующей системой  $\langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ , при этом принято выделять творческую и формальную составляющие процесса построения теоретико-игровой модели [82, с. 7–10]. Основными этапами творческой составляющей построения теоретико-игровой модели являются следующие:

1) формирование множества  $\mathbf{I}$  чистых стратегий первого и второго игроков, т.е. перечисление решений ЛПР, которые оно может реализовывать при однократном принятии управленческих решений, и множества  $\mathbf{J}$  возможных состояний экономической среды;

2) определение и формализация основных показателей эффективности и полезности, построение платежной матрицы  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$  соответствующей игры, характеризующей процесс принятия решений;

3) если процесс принятия управленческих решений характеризуется статической моделью, то определение (идентификация) имеющей место ИС, характеризующей поведение экономической среды, а для НАИ — определение (идентификация) имеющей место ИС, характеризующей неопределенность возможных значений неизвестных элементов платежной матрицы;

4) выбор правила (критерия принятия решений, называемого еще критерием оптимальности) поиска оптимальной стратегии ЛПР из множества критериев, которые можно применять в поле имеющей место ИС;

5) выбор оптимальной стратегии согласно выбранному критерию оптимальности среди чистых стратегий первого игрока

и/или его смешанных стратегий, если их применение возможно и экономически целесообразно.

Помимо творческой составляющей процесса принятия управленческих решений с учетом хаотичности, неопределенности, конфликтности и обусловленного ими риска, этот процесс требует досконального владения формальной составляющей. Суть формальной составляющей состоит в применении математического инструментария и выполнении соответствующих расчетов выбранных показателей эффективности, на основе которых удастся построить функционал оценивания  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$ . Кроме того, формальная составляющая процесса принятия управленческих решений включает в себя выполнение расчетов, необходимых для поиска оптимальной стратегии ЛПР согласно выбранному критерию оптимальности (критерию принятия решений) или множества равноценных оптимальных стратегий, применение которых эквивалентно с точки зрения выбранного критерия оптимальности. При этом можно утверждать, что правила расчета показателей эффективности и поиска оптимального решения согласно выбранному критерию представляют собой математическое обеспечение процесса принятия управленческих решений с учетом хаотичности, противоречивости, неопределенности, неполноты информации, конфликтности, конкуренции, многокритериальности, альтернативности и обусловленного ими экономического риска.

Следует учитывать, что в случае принятия статистических решений для рассматриваемого процесса принятия решений, заданного в поле имеющей место ИС, возможно применение различных критериев оптимальности.

Как уже отмечалось, мы будем отождествлять исходную статистическую игру с соответствующей АИ, характеризующей процесс принятия управленческих решений, т.е. с АИ, заданной той же самой платежной матрицей.

С точки зрения корректного применения теории антагонистических игр в экономике найденное решение АИ, характеризующей процесс принятия управленческих решений, должно получить правильную экономическую интерпретацию. К сожалению, в обширной литературе по теоретико-игровому моделированию экономики до сих пор этому важнейшему вопросу не уделялось достаточного внимания.

В основе корректной реализации управленческого решения, принятого на основе решения соответствующей АИ, лежит возможность экономической интерпретации найденного решения этой игры, в частности возможность экономической интерпре-

тации компонент оптимальных стратегий игроков, цены соответствующей АИ и их найденных числовых значений. Экономические интерпретации компонент оптимальных стратегий игроков, цены соответствующей АИ и их найденных числовых значений могут быть самыми различными. В каждом конкретном случае следует учитывать экономическое содержание исходной задачи принятия управленческих решений.

Как отмечалось выше, теоретико-игровые модели нашли широкое применение для решения задач оптимального распределения имеющихся ресурсов между разными активами. С экономической точки зрения, распределение ресурсов представляет собой диверсификацию деятельности. Научной основой диверсификации является современная теория портфеля. Различные теоретические и практические аспекты применения АИ в теории портфеля были рассмотрены А.В. Сигалом, например, в монографии [18, раздел 6]. В этой работе, в частности, уделялось внимание вопросам обоснования корректности поиска структуры эффективного (оптимального по Парето) портфеля на основе решения соответствующей АИ. Кроме того, в ней были приведены модели задачи выбора структуры эффективного портфеля в поле четвертой и пятой ИС, когда неизвестно распределение вероятностей состояний экономической среды. В рамках этих моделей была обоснована возможность и корректность теоретико-игрового метода решения задачи выбора структуры эффективного портфеля в поле четвертой и пятой ИС. Важно подчеркнуть, что модель задачи выбора структуры эффективного портфеля в поле четвертой ИС базируется на совместном применении энтропийного подхода и концепции теории игр.

При теоретико-игровом моделировании задачи выбора структуры эффективного портфеля в поле различных ИС структура эффективного портфеля может быть найдена на основании решения АИ, заданной матрицей, элементы которой представляют собой, например, наблюдавшиеся значения норм прибыли выбранных активов. В этом случае при выполнении определенных требований [18, с. 317–379] значения компонент оптимальной стратегии первого игрока можно интерпретировать как значения долей, в которых инвестору следует распределить имеющиеся средства между соответствующими активами. При этом оптимальная смешанная стратегия  $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_i^*; \dots; p_k^*)$  первого игрока будет задавать структуру эффективного портфеля, а именно портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска, оцененного дисперсией нормы прибыли портфеля (портфель, обладающий наименьшим уровнем

риска, всегда является эффективным портфелем). В частности, данный подход возможен, если все чистые стратегии второго игрока являются его активными стратегиями. Например, в случае когда  $\text{supp } \mathbf{q}^* = \mathbf{J}$ , т.е.  $q_j^* > 0, j = 1, n$ , легко доказать, что дисперсия СВ, характеризующей норму прибыли портфеля со структурой  $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_i^*; \dots; p_k^*)$ , равна числу 0. Поэтому значение уровня риска портфеля не может быть улучшено за счет изменения его структуры, а портфель, обладающий структурой  $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_i^*; \dots; p_k^*)$ , действительно является эффективным портфелем, а именно портфелем, обладающим наименьшим уровнем риска, оцененного дисперсией нормы прибыли портфеля.

Следует учитывать, что при нарушении соответствующих требований вектор  $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_i^*; \dots; p_k^*)$  может и не задавать структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска, оцененного дисперсией нормы прибыли портфеля. Более того, при нарушении указанных требований этот вектор может задавать структуру портфеля, не являющегося эффективным (оптимальным по Парето) портфелем. Рассмотрим более подробно задачу выбора структуры эффективного портфеля.

### 4.3. ТРАДИЦИОННАЯ МОДЕЛЬ МАРКОВИЦА

Значения норм прибыли активов зависят от состояния экономической среды (рынка). Множество возможных состояний экономической среды может состоять, в принципе, из любого количества элементов, в частности оно может быть бесконечным (и даже может быть континуумом). Для простоты будем считать его конечным. Таким образом, в этом случае СВ, характеризующие нормы прибыли активов, представляют собой дискретные случайные величины.

Введем следующие обозначения:  $k$  — количество активов, составляющих портфель,  $x_i$  — доля актива  $i$ -го вида в портфеле,  $\mathbf{x} = (x_1; \dots; x_i; \dots; x_k)$  — портфель (точнее, его структура),  $R_i$  — СВ, характеризующая норму прибыли актива  $i$ -го вида,  $R\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k R_i \cdot x_i$  — СВ, характеризующая норму прибыли портфеля  $\mathbf{x}$ ,  $m_i = \mathbf{M}(R_i)$  и  $m\mathbf{x} = \mathbf{M}(R\mathbf{x})$  — ожидаемые нормы прибыли соответствующего актива  $i$ -го вида и портфеля  $\mathbf{x}$ , т.е. математические ожидания соответствующих СВ,  $\sigma_i^2 = \mathbf{D}(R_i)$  и  $\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{D}(R\mathbf{x})$  — уровни риска соответствующего актива  $i$ -го вида и портфеля  $\mathbf{x}$ , т.е. дисперсии соответствующих СВ,  $c_{ij} = \text{cov}(R_i; R_j)$  — ковариация между соответствующими



ющими СВ,  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_k \times_k = (c_{ij})$  — ковариационная матрица. Согласно современной теории портфеля, традиционная модель Марковица задачи поиска структуры эффективного портфеля представляет собой следующую задачу двухкритериальной оптимизации:

$$m\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k m_i \cdot x_i \rightarrow \max_{\mathbf{x}}, \quad (4.9)$$

$$\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k c_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \rightarrow \min_{\mathbf{x}}, \quad (4.10)$$

$$\sum_{i=1}^k x_i = 1, \quad (4.11)$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, k}. \quad (4.12)$$

*Эффективным портфелем в модели Марковица* называют портфель, структура которого является оптимальным по Парето решением задачи (4.9) — (4.12), а *эффективным портфелем в модели Блэка* — портфель, структура которого является оптимальным по Парето решением задачи (4.9) — (4.11). Согласно определению эффективность портфеля, не существует другого допустимого в рассматриваемой модели портфеля с не меньшим значением ожидаемой нормы прибыли и меньшим значением уровня экономического риска или с большим значением ожидаемой нормы прибыли и не большим значением уровня экономического риска.

Следует учитывать, что для портфелей  $\mathbf{x} = (x_1; \dots; x_i; \dots; x_k)$ , допустимых в модели Блэка, компоненты  $x_i$  могут принимать отрицательные значения, что соответствует так называемой короткой позиции актива. Наличие короткой позиции означает, что инвестор продал соответствующий актив, который он взял в займы и в дальнейшем должен будет выкупить на рынке соответствующее количество этого актива с тем, чтобы вернуть его бывшему владельцу. Короткая позиция открывается в ожидании снижения стоимости актива, взятого в займы инвестором. При благоприятном стечении обстоятельств открытие инвестором короткой позиции позволяет получить ему существенную, а иногда и большую, прибыль. Однако осуществление таких операций отягощено высоким уровнем экономического риска.

Эффективность портфеля означает его *неулучшаемость*, т.е. неулучшаемость значений его числовых характеристик. Относительно эффективного портфеля любой другой (несовпадающий с ним)

портфель имеет или большее значение уровня экономического риска, или меньшее значение ожидаемой нормы прибыли. Свойство эффективности портфеля можно представить в виде наглядной геометрической интерпретации, если в двумерном евклидовом пространстве критериев (критериальном пространстве)  $m \times 0 \sigma x$  вдоль одной координатной оси откладывать ожидаемую норму прибыли портфеля, а вдоль второй — уровень экономического риска.

Множество эффективных портфелей является, как правило, множеством, содержащим бесконечно много элементов. Однако множество эффективных портфелей — это лишь часть множества допустимых портфелей. Кроме того, принимая решение о структуре формируемого им портфеля, инвестор должен выбрать среди эффективных портфелей такой портфель, который обладает наилучшим с его точки зрения сочетанием значений числовых характеристик: ожидаемой нормы прибыли и уровня риска.

Для поиска оптимальных по Парето решений задачи многокритериальной оптимизации ее, как правило, приводят к задаче однокритериальной оптимизации. Например, задачу (4.9) — (4.12) приводят к задаче оптимизации функции полезности инвестора, которая представляет собой некоторую свертку (выпуклую линейную комбинацию) всех критериев, т.е. к задаче максимизации функции полезности, имеющей вид  $u(\mathbf{x}) = a \cdot m \times - (1 - a) \cdot \sigma_x^2$ , где  $a$  — параметр, удовлетворяющий неравенствам  $0 \leq a \leq 1$ . Конкретное числовое значение параметра  $a$  задает инвестор (ЛПР), при этом выбранное им значение параметра  $a$  характеризует его отношение к риску, точнее, степень его несклонности к риску.

В случаях, когда с точки зрения инвестора ему нецелесообразно рисковать, он должен формировать портфель, обладающий наименьшим уровнем риска. К таким случаям можно отнести условия жесткой конкуренции, кризиса, предкризисной ситуации и/или случай, когда отношение ЛПР к риску характеризуется его существенной несклонностью к риску.

Чтобы найти структуру  $\mathbf{x}^*$  портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска в модели Марковица, необходимо решить задачу (4.10) — (4.12). А для того, чтобы найти структуру  $\mathbf{x}^*$  портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска в модели Блэка, необходимо решить задачу (4.10) — (4.11). Если инвестор ищет структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска, то это соответствует нулевому значению параметра  $a$  в функции полезности  $u(\mathbf{x})$  инвестора ( $a = 0$ ), что означает его абсолютную несклонность к риску. Очевидно, числовые характеристики портфеля  $\mathbf{x}^*$ , облада-

ющего наименьшим уровнем риска в соответствующей модели, могут быть найдены по формулам  $m_{\mathbf{x}}^* = \sum_{i=1}^k m_i \cdot x_i^*$  и  $\sigma_{\mathbf{x}}^{*2} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k c_{ij} \cdot x_i^* \cdot x_j^*$ .

Предварительно остановимся на некоторых свойствах числовых характеристик допустимых портфелей.

Пусть  $X = \left\{ \mathbf{x} = (x_1; \dots; x_i; \dots; x_k) \left| \sum_{i=1}^k x_i = 1 \right. \right\}$  — это множество портфелей, допустимых в модели Блэка,

$X^+ = \left\{ \mathbf{x} = (x_1; \dots; x_i; \dots; x_k) \left| \sum_{i=1}^k x_i = 1, x_i \geq 0, i = \overline{1, k} \right. \right\}$  — множество портфелей, допустимых в модели Марковица. Тогда, если  $\mathbf{x} \in X^+$ , то справедливы соотношения  $\min_i m_i \leq m_{\mathbf{x}} \leq \max_i m_i$ ,  $\min_{\mathbf{x} \in X^+} \sigma_{\mathbf{x}}^2 \leq \sigma_{\mathbf{x}}^2 \leq \max_i \sigma_i^2$  и  $\min_{\mathbf{x} \in X^+} \sigma_{\mathbf{x}}^2 \leq \min_i \sigma_i^2$ , а если  $\mathbf{x} \in X$ , то справедливы соотношения  $\min_{\mathbf{x} \in X} \sigma_{\mathbf{x}}^2 \leq \sigma_{\mathbf{x}}^2$  и  $\min_{\mathbf{x} \in X} \sigma_{\mathbf{x}}^2 \leq \min_i \sigma_i^2$ , при этом  $0 \leq \min_{\mathbf{x} \in X} \sigma_{\mathbf{x}}^2 \leq \min_{\mathbf{x} \in X^+} \sigma_{\mathbf{x}}^2$ .

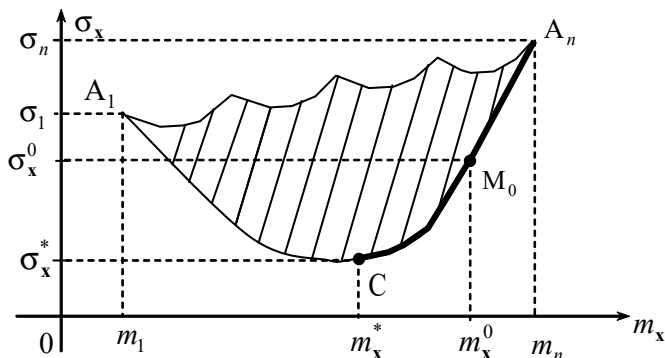
Следовательно, для портфеля  $\mathbf{x}^*$ , обладающего наименьшим уровнем риска в модели Блэка, если  $\mathbf{x}^* \in X^+$ , то справедливы соотношения  $\min_i m_i \leq m_{\mathbf{x}^*} \leq \max_i m_i$  и  $0 \leq \min_{\mathbf{x} \in X^+} \sigma_{\mathbf{x}}^2 = \sigma_{\mathbf{x}^*}^{*2} \leq \min_i \sigma_i^2$ , а если  $\mathbf{x}^* \notin X^+$ , то  $\min_{\mathbf{x} \in X} \sigma_{\mathbf{x}}^2 \leq \sigma_{\mathbf{x}^*}^2$ , для любого  $\mathbf{x} \in X$ , и  $0 \leq \min_{\mathbf{x} \in X} \sigma_{\mathbf{x}}^2 < \min_{\mathbf{x} \in X^+} \sigma_{\mathbf{x}}^2 \leq \min_i \sigma_i^2$ .

Решение задачи выбора структуры портфеля, обладающего заданными свойствами, следует начинать с построения множества эффективных (неулучшаемых) портфелей. Если каждому портфелю поставить в соответствие точку, координатами которой являются его числовые характеристики (значения критериев), то геометрической моделью совокупности допустимых портфелей является критериальное множество точек на критериальной плоскости  $m_{\mathbf{x}} \text{ vs } \sigma_{\mathbf{x}}$ , а геометрической моделью совокупности эффективных портфелей — часть границы этого множества.

Сущность подхода к построению геометрической модели множества эффективных портфелей состоит в том, что фиксируются значения всех количественных показателей (критериев) портфеля, кроме одного, а по незафиксированному показателю отыскивается оптимальное значение.

Г. Марковиц показал, что на критериальной плоскости  $m_{\mathbf{x}} \text{ vs } \sigma_{\mathbf{x}}$  множеству эффективных портфелей соответствуют точки, которые принадлежат соответствующей части границы множества допустимых портфелей, при этом эта граница является непрерывной,

выпуклой вниз (рис. 4.1) кривой, состоящей из конечного количества дуг гипербол и (возможно) прямолинейных отрезков.



**Рис. 4.1.** Множество допустимых (заштрихованная фигура) и множество эффективных (жирная линия) портфелей

На рис. 4.1 приведены следующие геометрические образы: множество допустимых портфелей — заштрихованная фигура; «минимальная граница» — дуга  $A_1CA_n$ , множество эффективных портфелей — дуга  $CA_n$ .

На рисунке 4.1 точке  $A_1$  соответствует актив (однородный портфель  $\mathbf{e}_1 = (1; 0; 0; \dots; 0)$ ) с числовыми характеристиками  $m_1, \sigma_1$ , где  $m_1 = \min_i m_i$ , точке  $A_n$  — актив (однородный портфель  $\mathbf{e}_n = (0; \dots; 0; 0; 1)$ ) с числовыми характеристиками  $m_n, \sigma_n$ , где  $m_n = \max_i m_i$ , точке  $C$  — эффективный портфель  $\mathbf{x}^*$ , обладающий наименьшим уровнем экономического риска, с числовыми характеристиками  $m_x^*, \sigma_x^*$ , а точке  $M_0$  — эффективный портфель с числовыми характеристиками  $m_x^0, \sigma_x^0$ . Указанные числовые характеристики определяют значения координат соответствующих точек.

Согласно изображению на рисунке 4.1, для соответствующих числовых характеристик выполняются следующие соотношения:

$$\sigma_x^* = \min_{\mathbf{x}} \sigma_{\mathbf{x}} < \min_i \sigma_i = \sigma_1, \sigma_x^* < \sigma_x^0,$$

$$m_1 = \min_i m_i < m_x^* < m_x^0 < \max_i m_i = m_n.$$

Обозначим  $\mathbf{J}_k = (1; 1; \dots; 1)$  соответствующий вектор размерности  $k$ . Справедлива следующая теорема о возможности поиска структуры эффективного портфеля, основанного на решении АИ.

**Теорема 4.1.** Пусть ковариационная матрица  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_k \times_k = (c_{ij})$  является положительно определенной, а в КАИ, заданной матрицей  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_k \times_k = (c_{ij})$ , существует вполне смешанная ситуация равновесия  $(\mathbf{p}^*; \mathbf{q}^*)$ , т.е.  $\text{supp } \mathbf{p}^* = \mathbf{I}$ ,  $\text{supp } \mathbf{q}^* = \mathbf{J}$ . Тогда КАИ, заданная матрицей  $\mathbf{C}$ , является вполне смешанной игрой, положительный

вектор  $\mathbf{x}^* = \mathbf{q}^* = \mathbf{p}^* = \frac{\mathbf{J}_k \cdot \mathbf{C}^{-1}}{\mathbf{J}_k \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{J}_k^T}$  — оптимальным решением задачи

(4.10) — (4.11), число  $\min_{\mathbf{x}} \sigma_{\mathbf{x}}^2 = \sigma_{\mathbf{x}^*}^2 = \mathbf{x}^* \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}^{*T} = V_{\mathbf{C}}^*$  — минимальным

значением критерия (4.10), где  $V_{\mathbf{C}}^* = \frac{1}{\mathbf{J}_k \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{J}_k^T}$  — цена данной КАИ,

$\sigma_{\mathbf{x}^*}^2 = \mathbf{D}(R_{\mathbf{x}^*}^*)$  — дисперсия СВ  $R_{\mathbf{x}^*}^* = \sum_{i=1}^k R_i \cdot x_i^*$ , характеризующей норму

прибыли портфеля  $\mathbf{x}^*$ , обладающего наименьшим уровнем риска.

В основе доказательства теоремы 4.1 лежат основные свойства вполне смешанных игр [12, с. 79–83]. Согласно этим свойствам, если требования теоремы 4.1 справедливы, то КАИ, заданная ковариационной матрицей  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_k \times_k = (c_{ij})$ , имеет единственную ситуацию равновесия  $(\mathbf{p}^*; \mathbf{q}^*)$ , при этом в силу симметричности ковариационной матрицы  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_k \times_k = (c_{ij})$  вполне смешанные оптимальные стратегии игроков совпадают между собой. Вектор  $\mathbf{x}^* = \mathbf{q}^* = \mathbf{p}^*$  и определяет структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска. Кроме того, положительный вектор  $\mathbf{x}^* = \mathbf{q}^* = \mathbf{p}^*$  является оптимальным решением как задачи (4.10) — (4.11), так и задачи (4.10) — (4.12). Подчеркнем, что если требования теоремы 4.1 справедливы, то  $\sigma_{\mathbf{x}^*}^2 = \min_{\mathbf{x} \in X^+} \sigma_{\mathbf{x}}^2 = \min_{\mathbf{x} \in X} \sigma_{\mathbf{x}}^2 = V_{\mathbf{C}}^* > 0$ . Как правило, значение ожидаемой нормы прибыли портфеля  $\mathbf{x}^*$ , обладающего наименьшим уровнем риска, не является наихудшим (т.е. наименьшим) на множестве всех портфелей, допустимых в соответствующей модели: в невырожденном случае справедливы соотношения

$\sigma_{\mathbf{x}^*}^2 = \mathbf{D}(R_{\mathbf{x}^*}^*) = \mathbf{x}^* \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}^{*T} < \min_i \sigma_i^2$ ,  $m_{\mathbf{x}^*}^* = \mathbf{M}(R_{\mathbf{x}^*}^*) = \sum_{i=1}^k m_i \cdot x_i^* > \min_i m_i$ . Очевидно, при соблюдении всех требований теоремы 4.1 соотношения

(4.8) будут выполняться как строгие числовые равенства.

Если в формулировке теоремы 4.1 требование положительной определенности ковариационной матрицы заменить требованием ее положительной полуопределенности, то ковариационная матрица окажется вырожденной, при этом  $\sigma_{\mathbf{x}^*}^2 = \min_{\mathbf{x} \in X^+} \sigma_{\mathbf{x}}^2 = \min_{\mathbf{x} \in X} \sigma_{\mathbf{x}}^2 = 0$ .

Для традиционной модели Марковица имеются и другие теоретико-игровые методы поиска структуры эффективного портфеля.

При решении задачи поиска структуры эффективного портфеля можно применить АИ, заданную матрицей, элементы которой представляют собой наблюдавшиеся значения норм прибыли активов.

**Теорема 4.2.** Пусть в КАИ, заданной матрицей  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$ , где  $r_{ij}$  — значение нормы прибыли актива  $i$ -го вида в условиях, когда экономическая среда оказалась в своем  $j$ -м возможном состоянии, отсутствует седловая точка и второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, т.е.  $\text{supp } \mathbf{q}^* = \mathbf{J}$ . Тогда оптимальная стратегия  $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_i^*; \dots; p_k^*)$  первого игрока задает структуру эффективного в модели Марковица портфеля, а именно портфеля  $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ , обладающего наименьшим уровнем риска в модели Марковица.

Если требования теоремы 4.2 справедливы, то портфель  $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$  будет представлять собой портфель без риска (точнее, портфель с нулевым несистематическим риском). При этом портфель без риска будет найден и тогда, когда все активы, составляющие этот портфель, являются рискованными. Дело в том, что если все требования теоремы 4.2 справедливы, то  $R_{\mathbf{x}}^* = \sum_{i=1}^k R_i \cdot x_i^* \equiv V_{\mathbf{R}}^* = \text{const}$ , откуда для значения дисперсии СВ  $R_{\mathbf{x}}^*$ , характеризующей норму прибыли портфеля  $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ , получаем соотношения  $\min_{\mathbf{x}} \sigma_{\mathbf{x}}^2 = \sigma_{\mathbf{x}^*}^{*2} = \mathbf{D}(R_{\mathbf{x}}^*) = \mathbf{D}(V_{\mathbf{R}}^*) = \mathbf{D}(\text{const}) = 0$ , поэтому портфель  $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$  одновременно является портфелем без риска и в модели Марковица, и в модели Блэка.

Требование в теореме 4.2 отсутствия седловой точки в КАИ, заданной матрицей  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$ , обусловлено желанием исключить из рассмотрения вырожденные случаи, такие как постоянство выигрышей:  $r_{ij} = c = \text{const}$ ,  $i = 1, \bar{k}$ ,  $j = 1, n$ .

Важно учитывать, что при нарушении требований теоремы 4.2 оптимальная стратегия  $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_i^*; \dots; p_k^*)$  первого игрока в соответствующей КАИ  $\mathbf{GR} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$  может задавать структуру портфеля, не являющегося эффективным портфелем даже в модели Марковица.

Теоремы 4.1, 4.2 и обосновывают возможность, математическую и экономическую корректность применения АИ для решения задачи поиска структуры эффективного портфеля для традиционной модели Марковица. А теорема 4.2 позволяет, кроме того, обобщить модель Марковица для случая, когда законы распределения СВ, характеризующих нормы прибылей активов, не являются полностью известными. Это позволяет прийти к выводу о возможности, корректности и эффективности принятия управленческих решений

об оптимальном распределении ресурсов, основанных на решении соответствующих АИ. При этом, как будет показано ниже, в поле так называемой четвертой информационной ситуации для обобщения модели Марковица необходимо совместное применение теоретико-игрового и энтропийного подходов. Более того, в этом случае совместное применение теоретико-игрового и энтропийного подходов следует признать не только целесообразным, но и весьма продуктивным.

#### **4.4. ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ МАРКОВИЦА ПРИ НАЛИЧИИ АНТАГОНИЗМА**

Теоретико-игровой подход позволяет построить модель задачи поиска структуры эффективного портфеля в условиях, когда неизвестны законы распределения СВ  $R_i$  и  $R_x$ . Ниже будут рассмотрены модели задачи поиска структуры эффективного портфеля в поле так называемых третьей, четвертой и пятой ИС [82, с. 13].

Согласно классификации ИС, введенной Р.И. Трухаевым, в условиях четвертой ИС о поведении экономической среды нет никакой информации, а в условиях пятой ИС интересы инвестора и экономической среды антагонистичны. Сначала рассмотрим модель задачи поиска структуры эффективного портфеля в поле пятой ИС.

Пусть  $q_j$  — вероятность реализации  $j$ -го возможного состояния экономической среды. Тогда если известны значения всех чисел  $r_{ij}$  и всех вероятностей  $q_j$ , то все дискретные СВ  $R_i$  полностью заданы своими известными законами распределения, поэтому можно вычислить точные истинные значения их числовых характеристик:  $m_i = \mathbf{M}(R_i)$ ,  $\sigma_i^2 = \mathbf{D}(R_i)$ ,  $c_{il} = \text{cov}(R_i; R_l)$ . В этом случае модель задачи поиска структуры эффективного портфеля представляет собой задачу (4.9) — (4.12). Как отмечалось выше, возможность и корректность теоретико-игрового метода поиска структуры эффективного портфеля для традиционной модели Марковица обосновывают теоремы 4.1 и 4.2. Отметим некоторые важные особенности теоремы 4.2.

Во-первых, если не имеет место вырожденный случай, то необходимым условием для выполнения требования теоремы 4.2 является справедливость неравенства  $k \geq n$  (число активов должно быть не меньше числа возможных состояний экономической среды). На практике это означает, что число активов должно быть не меньше числа наблюдений.

Во-вторых, теорема 4.2 имеет ряд преимуществ по сравнению с теоремой 4.1. Так, если ковариационная матрица является вырожденной, то она не является положительно определенной матрицей и, как следствие, теорема 4.1 может оказаться неприменимой.

В-третьих, применение теоремы 4.2 не требует знания точных истинных законов распределений СВ, характеризующих нормы прибыли активов, и, как следствие, не требует знания точных истинных значений числовых характеристик этих СВ.

Предположим, что значения  $r_{ij}$  всех элементов платежной матрицы (по сути, всех наблюдавшихся значений норм прибыли рассматриваемых активов) известны, а точные истинные значения вероятностей  $q_j$  неизвестны. В этом случае математические ожидания

$$m_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot q_j, \text{ дисперсии } \sigma_i^2 = \sum_{j=1}^n r_{ij}^2 \cdot q_j - m_i^2 \text{ СВ, характеризующих}$$

нормы прибыли активов, и ковариации  $c_{ij} = \sum_{l=1}^n r_{il} \cdot r_{jl} \cdot q_l - m_i \cdot m_j$

представляют собой функции нескольких переменных, аргументами которых являются вероятности  $q_1, \dots, q_n$ . Поэтому показатели

$$m\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k m_i \cdot x_i, \sigma_{\mathbf{x}}^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k c_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \text{ СВ, характеризующей норму при}$$

были портфеля, также представляют собой функции нескольких переменных, аргументами которых являются неизвестные вероятности  $q_1, \dots, q_n$  и возможные значения долей  $x_1, \dots, x_k$  активов.

Теперь модель задачи поиска структуры эффективного портфеля зависит от имеющей место ИС. Если интересы инвестора и экономической среды антагонистичны, т.е. имеет место пятая ИС [82, с. 13], то модель задачи поиска структуры эффективного портфеля в поле пятой ИС представляет собой следующую задачу трехкри- териальной оптимизации:

$$\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k c_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \rightarrow \min_{\mathbf{x}}, \quad (4.13)$$

$$m\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k m_i \cdot x_i \rightarrow \max_{\mathbf{x}}, \quad (4.14)$$

$$m\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k m_i \cdot x_i \rightarrow \min_{\mathbf{q}}, \quad (4.15)$$

$$\sum_{j=1}^n q_j = 1, \quad (4.16)$$



$$\sum_{i=1}^k x_i = 1, \quad (4.17)$$

$$q_j \geq 0, j = \overline{1, n}, \quad (4.18)$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, k}. \quad (4.19)$$

Очевидно, задача (4.14) – (4.19) представляет собой АИ, заданную матрицей  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$ , где  $r_{ij}$  – значение нормы прибыли актива  $i$ -го вида в условиях, когда экономическая среда оказалась в своем  $j$ -м возможном состоянии. Таким образом, в этом случае процесс принятия решений осуществляется по правилам решения АИ. В частности, если АИ, заданная матрицей  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$ , не имеет седловой точки, имеет единственную ситуацию равновесия  $(\mathbf{p}^*; \mathbf{q}^*)$ , то оптимальная стратегия  $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$  первого игрока задает структуру эффективного портфеля, а оптимальная стратегия  $\mathbf{q}^*$  второго игрока задает наиболее типичную точечную оценку распределения вероятностей состояний. Очевидно, при этом портфель  $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$  не обязательно окажется портфелем без риска.

Если же игра, заданная матрицей  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$ , не имеет седловой точки и имеет более одной ситуации равновесия, то для окончательного выбора структуры эффективного портфеля следует оптимизировать значение критерия (4.13) на множестве оптимальных стратегий первого игрока для некоторой оптимальной стратегии второго игрока.

Наконец, если в АИ, заданной матрицей  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$ , второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, то оптимальная стратегия  $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_i^*; \dots; p_k^*)$  первого игрока задает структуру эффективного портфеля, а именно портфеля без риска.

В поле пятой ИС игра, заданная матрицей  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$ , не только характеризует процесс принятия решений, но и моделирует его. В поле других ИС теоретико-игровой метод поиска структуры эффективного портфеля может применяться лишь как инструмент: решение соответствующей АИ при соблюдении указанных требований позволит найти структуру эффективного портфеля, что и обосновывает корректность применения теоретико-игрового подхода. В поле пятой ИС соответствующая АИ не только характеризует принятие управленческих решений, но и представляет собой естественную модель задачи поиска структуры эффективного портфеля.

Как отмечалось выше, в теории принятия статистических решений считается, что «природа» (экономическая среда) неосознанно, случайным образом, оказывается в одном из своих возможных состояниях. Однако предположение о том, что интересы инвестора и экономической среды антагонистичны, имеет смысл применять, когда инвестор считает нецелесообразным рисковать. Например, в условиях жесткой конкуренции, кризиса и т.п.

#### 4.5. ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ МАРКОВИЦА ПРИ ОТСУТСТВИИ ИНФОРМАЦИИ

Если имеет место четвертая ИС [82, с. 13], когда о поведении экономической среды нет никакой информации, т.е. для возможных значений вероятностей  $q_1, \dots, q_n$  нет никаких ограничений кроме естественных, то следует применить энтропийный подход, при этом модель задачи поиска структуры эффективного портфеля в поле четвертой ИС представляет собой следующую задачу трехкритериальной оптимизации:

$$H(\mathbf{q}) = -\sum_{j=1}^n q_j \cdot \ln q_j \rightarrow \max_{\mathbf{q}}, \quad (4.20)$$

$$m\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k m_i \cdot x_i \rightarrow \max_{\mathbf{x}}, \quad (4.21)$$

$$\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k c_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \rightarrow \min_{\mathbf{x}}, \quad (4.22)$$

$$\sum_{j=1}^n q_j = 1, \quad (4.23)$$

$$\sum_{i=1}^k x_i = 1, \quad (4.24)$$

$$q_j \geq 0, j = \overline{1, n}, \quad (4.25)$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, k}. \quad (4.26)$$

Как будет показано, решение соответствующей АИ позволяет найти структуру эффективного портфеля, а именно портфеля, обладающего для любого допустимого распределения вероятностей состояний экономической среды наименьшим уровнем риска.

Очевидно, суть требования (4.20) состоит в формализации принципа максимума энтропии. При этом, строго говоря, критерий (4.20) представляет собой максимизацию значения энтропии (1.11)

Шеннона, в которой для константы выбрано значение  $K = \frac{1}{\log_2 e} = \ln 2 \approx 0,6931$ . Подчеркнем, что в задаче поиска структуры эффективного портфеля в поле четвертой ИС каждый критерий имеет свой смысл. На наш взгляд, ожидаемая норма прибыли  $m_x$  характеризует экономическую эффективность портфеля, дисперсия  $\sigma_x^2$  — уровень экономического риска, энтропия  $H(\mathbf{q})$  — неполнота информации, т.е. знаний ЛПР о поведении экономической среды.

Как отмечалось выше, в случае применения энтропии Шеннона для анализа временных рядов требуется большое количество исходной информации. Однако в случае применения энтропийного подхода для поиска структуры эффективного портфеля объем выборочных данных о наблюдавшихся значениях норм прибыли активов, составляющих портфель инвестора, существенной роли не играет. Кроме того, в обобщенной модели Марковица в поле четвертой ИС энтропия выступает в роли одного из критериев задачи поиска структуры эффективного портфеля.

Сразу отметим, что задача (4.20) — (4.26) естественным образом может быть приведена к традиционной модели (4.9) — (4.12) двухкритериальной задачи поиска структуры эффективного портфеля.

Как известно, при выполнении ограничений (4.23) и (4.25) энтропия (4.20) Шеннона достигает своего наибольшего возможного значения при равномерном распределении вероятностей (белом шуме), т.е. когда справедливо соотношение  $\max_{\mathbf{q}} H(\mathbf{q}) = H(\hat{\mathbf{q}}) = \ln n$ ,

где  $\hat{\mathbf{q}} = \left( \frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n} \right)$  — соответствующий  $n$ -мерный вектор. Поэтому, подставляя в формулы для характеристик  $m_i$ ,  $\sigma_i^2$ ,  $c_{ij}$  оценки  $\hat{q}_1 = \dots = \hat{q}_n = \frac{1}{n}$ , задачу (4.20) — (4.26) можно привести к соответствующей задаче (4.9) — (4.12). Собственно, такой подход означает замену неизвестных значений соответствующих числовых характеристик СВ  $R_i$  и  $R_x$  их точечными статистическими оценками.

Заметим, что в этом случае энтропийный подход позволяет обосновать корректность применения смещенных статистических оценок соответствующих числовых характеристик активов. В частности, энтропийный подход ориентирует на то, что здесь применение выборочной дисперсии предпочтительнее применения исправленной выборочной дисперсии.

Рассмотрим теоретико-игровой метод решения задачи (4.20) — (4.26).

**Теорема 4.3.** Пусть в КАИ, заданной матрицей  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_k \times_n = (r_{ij})$ , где  $r_{ij}$  — значение нормы прибыли актива  $i$ -го вида в условиях, когда экономическая среда оказалась в своем  $j$ -м возможном состоянии, отсутствует седловая точка и второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, т.е.  $\text{supp } \mathbf{q}^* = \mathbf{J}$ . Тогда оптимальная стратегия  $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_i^*; \dots; p_k^*)$  первого игрока задает структуру портфеля  $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ , обладающего для всех допустимых распределений  $\mathbf{q} = (q_1; \dots; q_j; \dots; q_n)$  наименьшим уровнем риска как в модели Марковица, так и в модели Блэка. При этом вектор  $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$  задает структуру портфеля без риска, т.к. для всех допустимых распределений  $\mathbf{q} = (q_1; \dots; q_j; \dots; q_n)$  справедливы соотношения  $R_{\mathbf{x}}^* = \sum_{i=1}^k R_i \cdot x_i^* \equiv V_{\mathbf{R}}^* = = \text{const}$  и  $\min_{\mathbf{x}} \sigma_{\mathbf{x}}^2 = \sigma_{\mathbf{x}^*}^2 = \mathbf{D}(R_{\mathbf{x}}^*) = \mathbf{D}(V_{\mathbf{R}}^*) = \mathbf{D}(\text{const}) = 0$ , где  $V_{\mathbf{R}}^*$  — цена игры, заданной матрицей  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_k \times_n = (r_{ij})$ ,  $\sigma_{\mathbf{x}^*}^2$  — дисперсия СВ  $R_{\mathbf{x}}^* = \sum_{i=1}^k R_i \cdot x_i^*$ , характеризующей норму прибыли портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска.

Если требования теоремы 4.3 справедливы, то оптимальная стратегия первого игрока задает вектор  $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ , являющийся оптимальным решением как задачи (4.22) — (4.25), так и задачи (4.22) — (4.26) для всех значений вероятностей  $q_1, \dots, q_n$ , удовлетворяющих ограничениям (4.23), (4.25). Так как вектор  $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$  всегда задает структуру портфеля без риска (что возможно и тогда, когда все активы являются рискованными), применение теоремы 4.3 экономически обосновано в случаях, когда инвестору нецелесообразно рисковать.

#### 4.6. ФОРМУЛЫ ФИШБЕРНА

Вообще говоря, система ограничений в задаче поиска структуры эффективного портфеля при неизвестном законе распределения вероятностей может содержать не только ограничения (4.23) — (4.26). Если закон распределения вероятностей состояний экономической среды неизвестен, но известны некоторые соотношения между вероятностями этих состояний, то согласно классификации ИС, предложенной Р.И. Трухаевым, имеет место не четвертая, а третья ИС [82, с. 13]. В этом случае решение задачи максимизации энтропии Шеннона может существенно усложниться.

В таких случаях предпочтительнее использовать некоторые упрощенные формулы оценки неизвестных вероятностей состояний экономической среды. В частных случаях можно применять так называемые формулы Фишберна. При этом для распределения вероятностей состояний экономической среды, оцененного по соответствующей формуле, несложно вычислить соответствующее значение энтропии Шеннона. Очевидно, чем ближе для найденной оценки распределения вероятностей состояний экономической среды значение энтропии Шеннона к числу 0, тем меньшей степенью хаотичности характеризуется процесс принятия управленческих решений. Иначе говоря, тем более полной является имеющаяся у ЛПР информация. Аналогично, чем ближе значение энтропии Шеннона для найденной оценки распределения вероятностей состояний экономической среды к возможному максимуму, т.е. к числу  $\ln n$ , тем большей степенью хаотичности характеризуется процесс принятия управленческих решений, т.е. тем менее полной является имеющаяся у ЛПР информация.

Более точным числовым выражением удаленности найденной оценки распределения вероятностей состояний экономической среды от равномерного распределения вероятностей может служить значение расстояния Кульбака — Лейблера (1.14) или значение расхождения Реньи выбранного порядка  $\alpha$ .

Считается, что в поле третьей ИС на основе вербальной (или статистической) информации можно на качественном уровне установить приоритетность состояний экономической среды. Это означает, что для каждой пары состояний экономической среды можно указать, какое из них имеет больший приоритет (в плане большей вероятности наступления), или что они являются эквивалентными (имеют одинаковую вероятность наступления). Формулы Фишберна позволяют простым и естественным способом вычислить оценки значений вероятностей состояний экономической среды, если для этих вероятностей задан тот или иной вектор приоритетов.

Если согласно построенному ряду приоритетов имеет место *простое линейное соотношение упорядоченности*, то для возможных значений вероятностей состояний экономической среды справедливо неравенства

$$q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n.$$

Заметим, что за счет перенумерации состояний экономической среды всегда можно добиться соответствующего свойства монотонности значений вероятностей  $q_1, \dots, q_n$ .

Если эти соотношения включить (добавить) в систему ограничений задачи (4.20) – (4.26), то в этой ситуации при отыскании точечной оценки априорного распределения вероятностей состояний экономической среды П. Фишберн [86] предложил считать, что величины (оценки)  $\hat{q}_j$  образуют убывающую арифметическую прогрессию. Согласно этой гипотезе оценки  $\hat{q}_j$  можно найти по формуле

$$\hat{q}_j = \frac{2 \cdot (n - j + 1)}{n \cdot (n + 1)}, j = \overline{1, n},$$

называемой *первой формулой Фишберна*. Очевидно, числа, определяемые первой формулой Фишберна, удовлетворяют всем ограничениям (4.23) и (4.25). Например, если  $n = 5$ , применение первой формулы Фишберна позволяет найти следующие значения:

$$\hat{q}_1 = \frac{10}{30}, \hat{q}_2 = \frac{8}{30}, \hat{q}_3 = \frac{6}{30}, \hat{q}_4 = \frac{4}{30}, \hat{q}_5 = \frac{2}{30}.$$

Несложно вычислить значение энтропии Шеннона для найденной оценки распределения вероятностей состояний экономической среды:  $H(\hat{\mathbf{q}}) = -\sum_{j=1}^5 \hat{q}_j \cdot \ln \hat{q}_j \approx 1,4898$ . Найденное значение эн-

тропии Шеннона следует признать близким к максимально возможному значению  $\ln n = \ln 5 \approx 1,6094$ . Если  $X$  – СВ, заданная законом распределения вероятностей, найденным согласно первой формуле Фишберна для  $n = 5$ ,  $Y$  – соответствующая равномерно распределенная дискретная СВ, то, применяя формулы (1.14), находим  $D_{KL}(X, Y) \approx 0,1197$ ,  $D_{KL}(Y, X) \approx 0,1411$ .

Если на вербальном уровне сформирован ряд приоритета и ЛПР владеет небольшой по объему статистической информацией (которой еще недостаточно для статистической оценки распределения вероятностей), то можно на основе этой информации осуществить количественное уточнение ряда приоритетов, которое имеет вид *ряда бинарных отношений приоритета*, т.е. вид вектора  $\mathbf{v} = (v_1;$

$v_2;$  ...:  $v_{n-1}; v_n)$ , где  $v_j = \frac{q_j}{q_{j+1}}, j = \overline{1, n-1}, v_n = 1$ . В силу договоренности

о том, что состояния экономической среды всегда упорядочены по убыванию значений вероятностей их реализаций ( $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$ ), компоненты ряда бинарных отношений приоритета удовлетворяют неравенствам  $v_j \geq 1, j = \overline{1, n}$ . Если известен ряд бинарных отношений

приоритета, то для вычисления соответствующих точечных и, в определенной мере, субъективных оценок вероятностей можно применить формулу

$$\hat{q}_j = \frac{\prod_{s=j}^n v_s}{\sum_{j=1}^n \prod_{s=j}^n v_s}, j = \overline{1, n}.$$

Например, если  $n = 5$ ,  $\mathbf{v} = \left( \frac{16}{9}; 1; \frac{9}{4}; 2; 1 \right)$ , то с учетом того, что

$$\sum_{j=1}^5 \prod_{s=j}^5 v_s = \frac{16}{9} \cdot 1 \cdot \frac{9}{4} \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{9}{4} \cdot 2 \cdot 1 + \frac{9}{4} \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 20,$$

получаем следующие оценки значений вероятностей состояний экономической среды:

$$\hat{q}_1 = \frac{\frac{16}{9} \cdot 1 \cdot \frac{9}{4} \cdot 2 \cdot 1}{20} = \frac{8}{20} = 0,4, \hat{q}_2 = \frac{1 \cdot \frac{9}{4} \cdot 2 \cdot 1}{20} = \frac{9/2}{20} = 0,225,$$

$$\hat{q}_3 = \frac{\frac{9}{4} \cdot 2 \cdot 1}{20} = \frac{9/2}{20} = 0,225, \hat{q}_4 = \frac{2 \cdot 1}{20} = 0,1, \hat{q}_5 = \frac{1}{20} = 0,05.$$

Теперь для найденной оценки распределения вероятностей состояний экономической среды имеем  $H(\hat{\mathbf{q}}) \approx 1,4178$ ,  $D_{KL}(X, Y) \approx 0,1916$ ,  $D_{KL}(Y, X) \approx 0,2301$ . Очевидно, это распределение вероятностей обладает меньшим уровнем хаотичности по сравнению с уровнем хаотичности оценки распределения вероятностей, найденной согласно первой формуле Фишберна для  $n = 5$ .

Еще один распространенный случай — это случай, когда на основе имеющейся информации можно утверждать, что имеют место *частично усиленные линейные соотношения упорядоченности*:

$$\begin{cases} q_1 \geq q_2 + q_3 + \dots + q_n; \\ q_2 \geq q_3 + q_4 + \dots + q_n; \\ q_3 \geq q_4 + q_5 + \dots + q_n; \\ \dots \\ q_{n-1} \geq q_n. \end{cases}$$

В этой ситуации П. Фишберн предложил считать, что величины  $\hat{q}_j$  образуют убывающую геометрическую прогрессию, т.е. их значения могут быть найдены по формуле

$$\hat{q}_j = \frac{2^{n-j}}{2^n - 1}, j = \overline{1, n},$$

называемой *второй формулой Фишберна*.

Например, при  $n = 5$  имеем

$$\hat{q}_1 = \frac{2^{5-1}}{2^5 - 1} = \frac{16}{31}, \hat{q}_2 = \frac{2^{5-2}}{2^5 - 1} = \frac{8}{31}, \hat{q}_3 = \frac{2^{5-3}}{2^5 - 1} = \frac{4}{31}, \hat{q}_4 = \frac{2^{5-4}}{2^5 - 1} = \frac{2}{31}, \hat{q}_5 = \frac{1}{31}.$$

Теперь для найденной оценки распределения вероятностей состояний экономической среды имеем  $H(\hat{\mathbf{q}}) \approx 1,2427$ ,  $D_{KL}(X, Y) \approx 0,3667$ ,  $D_{KL}(Y, X) \approx 0,4383$ . Очевидно, это распределение вероятностей обладает меньшим уровнем хаотичности по сравнению с уровнями хаотичности оценок распределений вероятностей, найденных согласно предыдущим формулам для  $n = 5$ . Понятно, что уровень хаотичности оценки распределения вероятностей, найденной согласно второй формуле Фишберна, всегда меньше соответствующего уровня хаотичности оценки распределения вероятностей, найденной согласно первой формуле Фишберна.

Наконец, если ЛПР может указать интервалы, которым принадлежат вероятности состояний экономической среды,

$$\alpha_j \leq q_j \leq \beta_j, j = \overline{1, n},$$

то говорят, что имеют место *интервальные соотношения упорядоченности*. В этом случае П. Фишберн для получения точечной оценки априорного распределения вероятности предложил формулу

$$\hat{q}_j = \alpha_j + \frac{1 - \sum_{s=1}^n \alpha_s}{\sum_{s=1}^n (\beta_s - \alpha_s)} \cdot (\beta_j - \alpha_j), j = \overline{1, n},$$

называемую *третьей формулой Фишберна*. При этом должны выполняться соотношения  $\alpha_j < \beta_j, j = \overline{1, n}, \sum_{j=1}^n \alpha_j \leq 1, \sum_{j=1}^n \beta_j \geq 1$ .



Если, например,  $n = 5$  и  $q_1 \in [0,3; 0,6]$ ,  $q_2 \in [0,15; 0,3]$ ,  $q_3 \in [0,1; 0,3]$ ,  $q_4 \in [0; 0,2]$ ,  $q_5 \in [0; 0,1]$ , то, очевидно, имеем  $\alpha_j < \beta_j, j = 1, n$ ,

$$\sum_{j=1}^5 \alpha_j = 0,3 + 0,15 + 0,1 + 0 + 0 = 0,55 \leq 1,$$

$$\sum_{j=1}^5 \beta_j = 0,6 + 0,3 + 0,3 + 0,2 + 0,1 = 1,5 \geq 1,$$

поэтому

$$\sum_{j=1}^5 (\beta_j - \alpha_j) = \sum_{j=1}^5 \beta_j - \sum_{j=1}^5 \alpha_j = 1,5 - 0,55 = 0,95,$$

откуда

$$\hat{q}_1 = 0,3 + \frac{1-0,55}{0,95} \cdot (0,6 - 0,3) \approx 0,4421,$$

$$\hat{q}_2 = 0,15 + \frac{1-0,55}{0,95} \cdot (0,3 - 0,15) \approx 0,2211,$$

$$\hat{q}_3 = 0,1 + \frac{1-0,55}{0,95} \cdot (0,3 - 0,1) \approx 0,1947,$$

$$\hat{q}_4 = 0 + \frac{1-0,55}{0,95} \cdot (0,2 - 0) \approx 0,0947,$$

$$\hat{q}_5 = 0 + \frac{1-0,55}{0,95} \cdot (0,1 - 0) \approx 0,0474.$$

Теперь для найденной оценки распределения вероятностей имеем  $H(\hat{\mathbf{q}}) \approx 1,3808$ ,  $D_{KL}(X, Y) \approx 0,2286$ ,  $D_{KL}(Y, X) \approx 0,2642$ . Очевидно, это распределение вероятностей обладает меньшим уровнем хаотичности по сравнению с уровнем хаотичности оценки распределения вероятностей, найденной согласно первой формуле Фишберна для  $n = 5$ , и большим уровнем хаотичности по сравнению с уровнями хаотичности оценок распределений вероятностей, найденных согласно предыдущим двум формулам для  $n = 5$ . Кроме того, для оценки распределения вероятностей, найденной согласно первой формуле Фишберна, с возрастанием  $n$  значение

энтропии Шеннона неограниченно возрастает, т.к.  $H(\hat{\mathbf{q}}) \geq \ln \frac{n+1}{2}$ , а для оценки распределения вероятностей, найденной согласно второй формуле Фишберна,  $H(\hat{\mathbf{q}}) \approx \ln 4$ .

Таким образом, как правило, наибольшим значением энтропии Шеннона характеризуется оценка распределения вероятностей, найденная согласно первой формуле Фишберна, а наименьшим значением энтропии Шеннона — оценка распределения вероятностей, найденная согласно второй формуле Фишберна. Поэтому наибольшим уровнем хаотичности характеризуется процесс принятия решений, для которого распределение вероятностей состояний экономической среды оценивается согласно первой формуле Фишберна, а наименьшим уровнем хаотичности характеризуется процесс принятия решений, для которого распределение вероятностей состояний экономической среды оценивается согласно второй формуле Фишберна.

#### **4.7. СРАВНЕНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОГО И ЭНТРОПИЙНОГО ПОДХОДОВ ПРИ ПОИСКЕ СТРУКТУРЫ ЭФФЕКТИВНОГО ПОРТФЕЛЯ**

Рассмотрим следующую модельную ситуацию поиска структуры эффективного портфеля инвестора, в которой процесс принятия решений характеризует следующая информация:

- 1) известно множество  $\mathbf{I} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  всех чистых стратегий первого игрока, т.е. имеются активы  $k = 6$  видов;
- 2) известно множество  $\mathbf{J} = \{1; 2; 3; 4\}$  всех чистых стратегий второго игрока, т.е. экономической среды, может оказаться в одном из  $n = 4$  своих состояний;
- 3) полностью известна платежная матрица

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{6 \times 4} = (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 16,88 & 45,56 & 13,74 & 18,79 \\ 40,19 & 7,33 & 42,86 & -8,70 \\ 27,56 & -4,29 & 13,81 & 22,95 \\ -16,67 & 50 & -6,67 & 28,57 \\ 2 & 17,65 & 11,67 & 31,34 \\ 6,67 & -5 & 7,89 & -2,44 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Здесь законы распределения СВ  $R_{ij}$ , характеризующих нормы прибыли активов, точно не известны. Известными являются лишь возможные значения СВ  $R_{ij}$ , заданные элементами  $i$ -й строки ма-

трицы (4.27). На самом деле,  $r_{ij}$  представляют собой выборочные данные, т.е. статистически собранную информацию о значениях норм прибыли шести выбранных активов, наблюдавшихся за четыре предшествующих периода. При этом эти значения норм прибыли вычислены с точностью до двух знаков после запятой. Без значительной потери строгости рассуждений можно считать, что наблюдавшиеся числа  $r_{ij}$  и являются возможными значениями дискретных СВ  $R_i$ . Но для СВ  $R_i$  ряд распределения неизвестен, т.к. неизвестны вероятности  $P(R_i = r_{ij}), i = \overline{1, 6}, j = \overline{1, 4}$ .

Ситуацию формирования эффективного портфеля **характеризует** КАИ, заданная матрицей (4.27). Строго говоря, рассматриваемая АИ не может интерпретироваться как АИ, моделирующая процесс принятия решений. Действительно, здесь нет и не может быть противоречия между ЛПП (инвестором), с одной стороны, и экономической средой (фондовым рынком), с другой стороны. Тем более, нет и не может быть противоречия между ЛПП, с одной стороны, и портфелем или активами, его составляющими, с другой стороны.

Нижняя и верхняя чистые цены КАИ, заданной матрицей (4.27), равны  $\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j r_{ij} = 13,74$  и  $\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i r_{ij} = 31,34$  соответственно. Седловая точка в данной игре отсутствует, т.к. справедливо строгое неравенство  $\alpha = 13,74 < 31,34 = \beta$ . Таким образом, КАИ, заданная матрицей (4.27), оказалась игрой без седловой точки, поэтому она не имеет решения в чистых стратегиях.

Решив соответствующую симметричную пару взаимно-двойственных задач линейного программирования, найдем оптимальные смешанные стратегии игроков и цену данной игры:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^* &= \left( \frac{18631206973}{69323178409}, \frac{13176687754}{69323178409}, \frac{14494131495}{69323178409}; 0; \frac{23021152187}{69323178409}; 0 \right) \approx \\ &\approx (0,2687; 0,1901; 0,2091; 0; 0,3321; 0), \\ \mathbf{Q}^* &= \left( \frac{11583808729}{69323178409}, \frac{4905312129}{69323178409}, \frac{24199253547}{69323178409}, \frac{28634804004}{69323178409} \right) \approx \\ &\approx (0,1671; 0,0707; 0,3491; 0,4131), V_{\mathbf{R}}^* = \frac{12895664229137}{693231784090} \approx 18,602. \end{aligned}$$

Так как справедливы строгие неравенства  $q_j^* > 0, j = \overline{1, n}$ , все чистые стратегии второго игрока являются его активными стратегиями, а вектор  $\mathbf{q}^*$  является его вполне смешанной оптимальной страте-

гией. Согласно теореме 4.3, оптимальная стратегия  $\mathbf{p}^* \approx (0,2687; 0,1901; 0,2091; 0; 0,3321; 0)$  первого игрока определяет структуру эффективного портфеля  $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ , обладающего наименьшим уровнем риска. При этом для любого допустимого распределения вероятностей на множестве возможных состояний экономической среды для дискретной СВ  $R_{\mathbf{x}}^* = \sum_{i=1}^k R_i \cdot x_i^*$  справедливы равенства  $r_j^* = \sum_{i=1}^k (r_{ij} \cdot p_i^*) = V_{\mathbf{R}^*}, j = \overline{1, n}$ , т.е.  $R_{\mathbf{x}}^* = \sum_{i=1}^k R_i \cdot x_i^* = \sum_{i=1}^k R_i \cdot p_i^* \equiv V_{\mathbf{R}^*} = \text{const}$ , поэтому  $\sigma_{\mathbf{x}^*}^2 = \mathbf{D}(R_{\mathbf{x}}^*) = \mathbf{D}(V_{\mathbf{R}^*}) = \mathbf{D}(\text{const}) = 0$ .

Как известно, дисперсия любой СВ обязательно является неотрицательным числом. Следовательно, для любого портфеля  $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6)$ , удовлетворяющего соотношению (4.23), значение дисперсии не может быть улучшено (уменьшено) за счет изменения его структуры. Поэтому вектор  $\mathbf{p}^* \approx (0,2687; 0,1901; 0,2091; 0; 0,3321; 0)$  задает для любого распределения вероятностей структуру портфеля без риска, как в модели Марковица, так и в модели Блэка.

Искусство принятия управленческих решений в экономике требует от ЛПР профессионализма, компетентности и интуиции. Поэтому, ориентируясь на найденное решение АИ, характеризующей принятие рассматриваемого управленческого решения, ЛПР, вообще говоря, не обязано строго придерживаться соответствующей оптимальной стратегии.

Очевидно, законы распределения вероятностей СВ  $R_p$ , характеризующих нормы прибыли активов, можно оценить. В качестве возможных значений дискретной СВ  $R_p$ , естественно, следует выбрать элементы, расположенные в  $i$ -й строке матрицы (4.27). Значения оценок вероятностей возможных состояний экономической среды (рынка) и, следовательно, оценок соответствующих вероятностей  $P(R_i = r_{ij})$  зависят от имеющей место ИС относительно стратегии поведения экономической среды.

Если имеет место четвертая ИС, то о возможных значениях вероятностей  $q_j$  реализаций состояний экономической среды известно только то, что они удовлетворяют соотношениям для вероятностей закона распределения дискретной СВ. В поле четвертой ИС согласно принципу недостаточных оснований Бернулли — Лапласа [18, с. 160] наиболее характерной оценкой распределения вероятностей состояний следует считать равномерное распределение, т.е.

$P(R_i = r_{ij}) = \hat{q}_j = \frac{1}{n}, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, n}$ . Как известно, в поле четвертой ИС

точно к такому же выводу приводит принцип максимальной неопределенности Гиббса – Джейнса [18, с. 152–155], согласно которому требуется максимизировать энтропию Шеннона  $H(\mathbf{q}) = -\sum_{j=1}^n q_j \cdot \ln q_j$  при выполнении ограничений (4.23), (4.25).

Если же имеет место пятая ИС, то интересы ЛПР и экономической среды являются антагонистичными. В этом случае экономическая среда воспринимается как активный игрок. Как отмечалось выше, пятую ИС следует применять для моделирования экономики в условиях, когда с точки зрения ЛПР ему нецелесообразно рисковать. В поле пятой ИС принятие решений осуществляется согласно основным правилам теории АИ. Поэтому в поле пятой ИС наиболее характерной оценкой распределения вероятностей состояний экономической среды следует считать распределение, задаваемое оптимальной смешанной стратегией второго игрока, т.е.  $P(R_i = r_{ij}) = q_j^*$ ,  $i = \overline{1, k}, j = \overline{1, n}$ , где  $q_j^*$  – компоненты вектора  $\mathbf{q}^* \approx (0,1671; 0,0707; 0,3491; 0,4131)$ , который задает оптимальную смешанную стратегию второго игрока в КАИ, характеризующей рассматриваемую задачу выбора структуры эффективного портфеля.

Сначала рассчитаем значения (табл. 4.1) оценок числовых характеристик СВ, характеризующих нормы прибыли активов основываясь на законе распределения вероятностей, определяемого решением соответствующей КАИ, т.е. оптимальной стратегией

$\mathbf{q}^* \approx (0,1671; 0,0707; 0,3491; 0,4131)$  второго игрока:  $m_i^* = \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot q_j^* = V_{\Pi i}^*$ ,

$$\sigma_i^{*2} = \sum_{j=1}^n r_{ij}^2 \cdot q_j^* - m_i^{*2}, G_i^* = \left( \prod_{j=1}^n \left( 1 + \frac{r_{ij}}{100} \right)^{q_j^*} - 1 \right) \cdot 100, n = 4, i = \overline{1, k}, k = 6.$$

Показатель  $G_i^*$  является взвешенной среднегеометрической оценкой нормы прибыли [18, с. 92]  $i$ -го актива (или портфеля активов, соответственно). Эти числовые характеристики сравним со значениями соответствующих числовых характеристик портфеля  $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ .

Здесь значения математических ожиданий  $m_i^*$  указаны с точностью до одного знака после запятой, т.е. с точностью до 0,1 (например,  $V_{\mathbf{R}}^* \approx 18,6$ ), а значения дисперсий  $\sigma_i^{*2}$  и взвешенных среднегеометрических оценок норм прибыли соответствующих активов  $G_i^*$  – с точностью до двух знаков после запятой, т.е. с точностью до 0,01.

Очевидно, СВ  $R_{\mathbf{x}}^* = \sum_{i=1}^6 R_i \cdot p_i^*$ , характеризующая норму прибыли портфеля  $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ , вырождается в константу  $R_{\mathbf{x}}^* = R_{\mathbf{p}}^* = \sum_{i=1}^k R_i \cdot p_i^* \equiv V_{\mathbf{R}}^* =$

= const. При этом для любого из имеющихся активов имеется хотя бы один период, в котором наблюдавшееся значение  $r_{ij}$  его нормы прибыли строго меньше значения цены  $V_{\mathbf{R}}^* \approx 18,6$  соответствующей КАИ. Кроме того, ожидаемая норма прибыли СВ  $R_{\mathbf{x}}^* = R_{\mathbf{p}}^* = \sum_{i=1}^k R_i \cdot p_i^*$ , естественно, совпадает со значением цены  $\mathbf{M}(R_{\mathbf{x}}^*) = \mathbf{M}(V_{\mathbf{R}}^*) = V_{\mathbf{R}}^* \approx 18,6$  игры и с максимально возможным значением оценок ожидаемых норм прибыли для имеющихся активов, вычисленных на основе применения теоретико-игрового подхода:  $\max_i m_i^* = \max_i V_{\Pi i}^* = V_{\mathbf{R}}^* \approx 18,6$ .

Таблица 4.1

**Значения оценок числовых характеристик активов, вычисленные на основе применения теоретико-игрового подхода**

$i \backslash j$	1	2	3	4	$m_i^*$	$\sigma_i^{*2}$	$G_i^*$
1)	16,88	45,56	13,74	18,79	18,6	60,19	18,38
2)	40,19	7,33	42,86	8,7	18,6	600,18	15,99
3)	27,56	4,29	13,81	22,95	18,6	66,32	18,30
4)	16,67	50	6,67	28,57	10,2	471,47	8,10
5)	2	17,65	11,67	31,34	18,6	129,92	18,05
6)	6,67	5	7,89	2,44	2,5	27,11	2,37
$\mathbf{p}^*$	<b>18,6</b>	<b>18,6</b>	<b>18,6</b>	<b>18,6</b>	<b>18,6</b>	<b>0</b>	<b>18,6</b>

Рассчитаем теперь значения (табл. 4.2) оценок числовых характеристик СВ, характеризующих нормы прибыли активов, основываясь на законе распределения вероятностей, определяемом энтропийным подходом, т.е. равномерном законе распределения  $\hat{\mathbf{q}} = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$ . В этом случае  $\hat{m}_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n r_{ij}$ ,  $\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n r_{ij}^2 - \hat{m}_i^2$ ,  $\hat{G}_i = \left( \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{r_{ij}}{100}\right)} - 1 \right) \cdot 100$ , где  $n = 4$ ,  $i = \overline{1, k}$ ,  $k = 6$ . При этом значения выборочных средних  $\hat{m}_i$  указаны с точностью до одного знака после запятой, т.е. с точностью до 0,1, а значения выборочных дисперсий  $\hat{\sigma}_i^2$  и среднегеометрических оценок норм прибыли  $\hat{G}_i$  соответствующих активов — с точностью до двух знаков после запятой, т.е. с точностью 0,01.

**Значения оценок числовых характеристик активов, вычисленных на основе применения энтропийного подхода**

$i \backslash j$	1	2	3	4	$\hat{m}_i$	$\hat{\sigma}_i^2$	$\hat{G}_i$
1)	16,88	45,56	13,74	18,79	23,7	161,92	23,13
2)	40,19	7,33	42,86	8,7	20,4	478,43	18,36
3)	27,56	4,29	13,81	22,95	15,0	148,62	14,33
4)	16,67	50	6,67	28,57	13,8	719,01	10,67
5)	2	17,65	11,67	31,34	15,7	113,08	15,18
6)	6,67	5	7,89	2,44	1,8	31,26	1,63
$\mathbf{p}^*$	<b>18,6</b>	<b>18,6</b>	<b>18,6</b>	<b>18,6</b>	<b>18,6</b>	<b>0</b>	<b>18,6</b>

Для значений оценок ожидаемых норм прибыли имеющихся активов, вычисленных на основе применения энтропийного подхода, значение цены  $V_{\mathbf{R}}^* \approx 18,6$  соответствующей КАИ уступает только значениям оценок ожидаемых норм прибыли для первого и второго активов.

Среди значений уровней рисков активов, оцененных дисперсиями соответствующих СВ, наименьшим, а следовательно, наилучшим, значением уровня риска обладает портфель  $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ : и в случае применения теоретико-игрового подхода  $\mathbf{D}(R_{\mathbf{x}}^*) = \mathbf{D}(V_{\mathbf{R}}^*) = 0 < \sigma_i^{*2}, i = \overline{1, k}$ , и в случае применения энтропийного подхода  $\mathbf{D}(R_{\mathbf{x}}^*) = \mathbf{D}(V_{\mathbf{R}}^*) = 0 < \hat{\sigma}_i^2, i = \overline{1, k}$ .

Сравнение оценок среднегеометрических норм прибыли показывает, что или портфель  $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$  обладает наибольшим, а следовательно, наилучшим, значением этого показателя, или значение этого показателя для портфеля  $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$  уступает лишь значению  $\hat{G}_1$  для первого актива: в случае применения теоретико-игрового подхода  $G_{\mathbf{p}}^* = V_{\mathbf{R}}^* \approx 18,6 > G_i^*, i = \overline{1, k}$ , а в случае применения энтропийного подхода  $\hat{G}_{\mathbf{p}} = V_{\mathbf{R}}^* \approx 18,6 > \hat{G}_i, i = \overline{2, k}$ .

Рассчитаем значения выборочных оценок ковариаций между СВ, характеризующими нормы прибыли шести активов, образующих портфель инвестора:

$$c_{ij}^* = \sum_{l=1}^n r_{il} \cdot r_{jl} \cdot q_l^* - m_i^* \cdot m_j^*, \hat{c}_{ij} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{l=1}^n r_{il} \cdot r_{jl} - \hat{m}_i \cdot \hat{m}_j, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k}.$$

Результаты этих расчетов приведены в таблицах 4.3, 4.4. Ковариации вычислены с точностью до двух знаков после запятой, т.е. с точностью до 0,01.

Таблица 4.3

**Значения оценок ковариаций, вычисленных на основе применения теоретико-игрового подхода**

60,28	70,58	37,55	114,03	15,87	24,82
70,58	601,40	38,59	478,41	261,11	122,73
37,55	38,59	66,54	43,00	11,38	0,70
114,03	478,41	43,00	471,89	209,76	108,96
15,87	261,11	11,38	209,76	130,10	49,90
24,82	122,73	0,70	108,96	49,90	27,18

Таблица 4.4

**Значения оценок ковариаций, вычисленных на основе применения энтропийного подхода**

161,92	125,38	133,63	282,62	24,85	55,42
125,38	478,43	60,65	491,43	210,56	111,36
133,63	60,65	148,62	234,81	20,14	37,85
282,62	491,43	234,81	719,01	200,38	145,46
24,85	210,56	20,14	200,38	113,08	42,71
55,42	111,36	37,85	145,46	42,71	31,26

Таблицы 4.3 и 4.4 содержат соответствующие оценки ковариационной матрицы:  $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}_{6 \times 6}^* = (c_{ij}^*)$  и  $\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{C}}_{6 \times 6} = (\hat{c}_{ij})$ . Несложно убедиться, что обе эти матрицы являются вырожденными матрицами и для них выполняются равенства  $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{p}^{*\top} = 0$ ,  $\mathbf{p}^* \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{p}^{*\top} = 0$ .

Итак, для найденного эффективного портфеля  $\mathbf{p}^*$ , структуру которого определяет оптимальная смешанная стратегия первого игрока в КАИ, заданной матрицей (4.27), результаты теоретико-игровой и энтропийной оценок числовых характеристик эффективного портфеля несколько разнятся, но в обоих случаях портфель  $\mathbf{p}^*$  является портфелем без риска.

#### **4.8. ПОИСК СТРУКТУРЫ ЭФФЕКТИВНОГО ПОРТФЕЛЯ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ**

При теоретико-игровом моделировании стремятся полностью определить значения всех компонент игры: множества всех чистых



стратегий обоих игроков и значения всех элементов платежной матрицы игры. Но в экономических исследованиях, особенно в условиях становления рыночной экономики и приватизации государственной собственности, не всегда имеется возможность полностью определить значения всех элементов платежной матрицы игры, характеризующей принятие управленческих решений.

По общему мнению специалистов, процесс построения функционала оценивания (платежной матрицы) является одним из наиболее ответственных и сложных этапов теоретико-игрового моделирования. В случае применения АИ в экономике элементы  $r_{ij}$  платежной матрицы — это, как правило, числа, значения которых характеризуют соответствующие статистические наблюдения. В процессе построения функционала оценивания  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$  и оценивания точных истинных значений элементов  $r_{ij}$  этой матрицы возникают проблемы, приводящие к тому, что не для всех элементов  $r_{ij}$  платежной матрицы известны их точные истинные значения.

Например, при теоретико-игровом моделировании задачи поиска структуры эффективного портфеля в поле различных ИС среди рассматриваемых активов могут находиться ценные бумаги, которые начали обращаться на фондовом рынке относительно недавно. Такая ситуация особенно типична для условий переходной экономики, когда создается значительное количество новых предприятий, акционируются и приватизируются многочисленные предприятия и учреждения, ранее принадлежавшие государству, а также осуществляются первичные эмиссии ценных бумаг этих предприятий. В таких условиях для части активов значения норм прибыли известны не для всех рассматриваемых периодов. В результате платежная матрица соответствующей АИ будет известна частично.

Хотя игры с неполной информацией изучаются с середины XX века, например [99, 106], методы их решения часто требуют привлечения громоздкого и технически сложного математического аппарата. Поиск оптимального решения НАИ осложнен тем, что игроки вынуждены принимать решения с учетом неопределенности, конфликтности и обусловленного ими риска. Следует подчеркнуть, что в экономике такие категории, как неопределенность, неполнота информации, конфликтность, носят объективный характер. В некоторых случаях, но обязательно при наличии достаточных финансовых средств, необходимую информацию (например, коммерческую тайну конкурентов) можно приобрести. Но очень часто это невозможно в принципе, как невозможно абсо-

лотно точно узнать наперед значения будущих параметров таких экономических показателей, как, например, темп инфляции, уровень спроса, уровень предложения и т.д.

В рамках теории принятия решений с учетом неопределенности, конфликтности и обусловленного ими риска возможны различные концепции решения НАИ. Одним из естественных и простейших методов решения НАИ является решение, основанное на корректном приведении ее к соответствующей КАИ.

Для оценки значений неизвестных элементов платежной матрицы возможно использование методов интерполирования, экстраполирования, регрессионного анализа. Решение полученной КАИ можно интерпретировать как оптимальное решение исходной НАИ. Возможные методы преодоления неполноты информации, т.е. методы приведения НАИ к КАИ, зависят от имеющей место информационной ситуации относительно истинных значений неизвестных элементов платежной матрицы [64].

*Информационной ситуацией (ИС)*  $I_l$  будем называть определенную степень градации, характеризующую неопределенность значений элементов  $r_{ij}$ , точные истинные значения которых неизвестны, частично известной платежной матрицы  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$  НАИ.

Классификацию ИС можно представить в таком виде.

1. Нулевая ИС  $I_0$ , когда значения всех элементов  $r_{ij}$ , точные истинные значения которых неизвестны, измерены с существенными ошибками.

2. Первая ИС  $I_1$ , когда значения всех элементов  $r_{ij}$ , точные истинные значения которых неизвестны, являются возможными значениями заданных СВ.

3. Вторая ИС  $I_2$ , когда значения всех элементов  $r_{ij}$ , точные истинные значения которых неизвестны, являются возможными значениями заданных функций одной или нескольких переменных.

4. Третья ИС  $I_3$ , когда значения всех элементов  $r_{ij}$ , точные истинные значения которых неизвестны, удовлетворяют заданным ограничениям (например, принадлежат заданным множествам).

5. Четвертая ИС  $I_4$ , когда о значениях всех элементов  $r_{ij}$ , точные истинные значения которых неизвестны, нет никакой математической информации.

6. Пятая ИС  $I_5$ , когда значения всех элементов  $r_{ij}$ , точные истинные значения которых неизвестны, принимают наихудшие для первого игрока (ЛПР) значения. Пятую ИС следует применять для моделирования экономики в условиях, когда ЛПР считает нецелесообразным рисковать.

7. Шестая ИС  $I_6$ , когда значения всех элементов  $r_{ij}$ , точные истинные значения которых неизвестны, принадлежат заданным нечетким множествам [132].

8. Седьмая ИС  $I_7$  — смешанная ИС: а) среди элементов  $r_{ij}$  платежной матрицы имеются хотя бы два элемента, точные истинные значения которых неизвестны, при этом все эти элементы могут быть распределены хотя бы на две группы, для каждой из которых имеет место своя собственная ИС; или б) значения всех элементов  $r_{ij}$ , точные истинные значения которых неизвестны, являются возможными значениями заданных объектов двойной природы. К объектам двойной природы можно отнести, например, случайные функции (в том числе и случайные процессы), представляющие собой одновременно и совокупность различных СВ, и совокупность различных неслучайных (обычных) функций. Теория случайных процессов достаточно подробно изложена в [8].

Приведенная классификация ИС [71] представляет собой расширенную (за счет введения нулевой ИС) и уточненную (для формулировки понятия седьмой ИС) классификацию, впервые предложенную А.В. Сигалом и В.Ф. Блыщиком в их работе [64]. Классификация ИС, предложенная в [64], в значительной мере повторяла классификацию ИС относительно стратегии поведения экономической среды, предложенную Р.И. Трухачевым [82].

При решении НАИ во многих случаях неизвестные элементы платежной матрицы могут быть заменены их наиболее типичными (и/или наиболее важными) значениями, после чего следует решать соответствующую КАИ, заданную полученной полностью известной матрицей (или несколько соответствующих КАИ). Кратко перечислим возможные методы преодоления неполноты информации в поле каждой ИС.

1. В поле нулевой ИС  $I_0$  целесообразно проведение дополнительного исследования, позволяющего за доступную цену уточнить истинные значения неизвестных элементов с необходимой степенью точности.

2. В поле первой ИС  $I_1$  все неизвестные элементы можно заменить значениями определенных (одних и тех же) числовых характеристик соответствующих СВ (например, их математическими ожиданиями или их модальными значениями).

3. В поле второй ИС  $I_2$  все неизвестные элементы можно заменить значениями соответствующих функций для наиболее типичных и/или важных значений их аргументов.

4. В поле третьей ИС  $I_3$  все неизвестные элементы можно заменить их наиболее типичными и/или важными с экономической

точки зрения значениями, удовлетворяющими заданным ограничениям.

5. В поле четвертой ИС  $I_4$  все неизвестные элементы можно заменить их наиболее типичными и/или важными с экономической точки зрения значениями.

6. В поле пятой ИС  $I_5$  все неизвестные элементы можно заменить значениями, минимизирующими значение платежной функции  $V = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot p_i \cdot q_j$ , если цена игры ограничена на области

допустимых значений неизвестных элементов платежной матрицы при условии, что компоненты векторов  $\mathbf{p} = (p_1; \dots; p_j; \dots; p_k)$ ,  $\mathbf{q} = (q_1; \dots; q_j; \dots; q_n)$  обязаны удовлетворять всем естественным ограничениям.

7. В поле шестой ИС  $I_6$  следует применить какой-либо метод дефазификации, т.е. метод преобразования нечеткого множества в четкое число. Например, все неизвестные элементы можно заменить значениями, для которых их функции принадлежности принимают наибольшие значения, или их можно заменить значениями соответствующих средневзвешенных величин.

8. В поле седьмой ИС  $I_7$  для каждой отдельной группы неизвестных элементов следует применять свой подход, характерный для соответствующей ИС. Особый интерес представляет случай, когда все неизвестные элементы представляют собой возможные значения заданных случайных функций. Замена всех случайных функций их конкретными сечениями переводит ситуацию из поля седьмой ИС  $I_7$  в поле первой ИС  $I_1$ , а замена всех случайных функций их конкретными реализациями — в поле второй ИС  $I_2$ .

Очевидно, во многих случаях поиск оптимального решения НАИ может включать решение нескольких КАИ. Для окончательного выбора оптимального решения исходной НАИ может потребоваться применение методов исследования операций, распознавания образов, теории полезности. Кроме того, практически всегда важно использовать имеющуюся информацию экономического и другого нематематического характера.

Что касается применения теории АИ для решения задачи поиска структуры эффективного портфеля в условиях неполной информации, когда для некоторых активов нет данных о значениях их норм прибыли за некоторые периоды, то наиболее целесообразным является применение НАИ в поле седьмой ИС  $I_7$ . Дело в том, что модели случайных процессов с непрерывным временем адекватно описывают процессы изменения курсов ценных бумаг.

С точки зрения возможности применения энтропии для теоретико-игрового моделирования процессов распределения ресурсов в условиях неполной информации наиболее перспективным представляется использование НАИ, заданных в поле второй или четвертой ИС.

Подводя итог, можно прийти к следующему выводу. Применение энтропии для теоретико-игрового моделирования процессов распределения ресурсов позволило обобщить двухкритериальную модель Марковица задачи поиска структуры эффективного портфеля на случай, когда неизвестны точные истинные значения вероятностей возможных состояний экономической среды (рынка). В этом случае энтропия Шеннона выступает в качестве третьего критерия обобщенной модели Марковица. Совместное применение теоретико-игрового и энтропийного подходов при поиске структуры эффективного портфеля позволяет существенно снизить уровень экономического риска при достаточной экономической эффективности найденного портфеля.

#### **4.9. ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОРТФЕЛЕЙ, НАЙДЕННЫХ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫМ МЕТОДОМ**

Предлагаемые теоретико-игровые методы поиска эффективного портфеля, а также обобщенные модели задачи поиска эффективного портфеля базируются на концепции комбинированного применения статистических и антагонистических игр. Основы концепции комбинированного применения статистических и антагонистических игр наиболее полно изложены в монографии [67]. Суть комбинированного применения статистических и антагонистических игр заключается в отождествлении исходной статистической игры, моделирующей принятие управленческих решений, с АИ, платежная матрица которой совпадает с функционалом оценивания исходной статистической игры. Для поиска оптимальной стратегии ЛПР, в частности для поиска эффективного портфеля, можно решить АИ, характеризующую ситуацию принятия управленческих решений, точнее, АИ, характеризующую принятие решений о формировании эффективного портфеля.

Сформулируем строгое определение понятия «эффективный портфель». *Эффективным портфелем в модели Марковица* называют портфель, структура которого является оптимальным по Парето решением задачи (4.9) – (4.12), а *эффективным портфелем в модели Блэка* – портфель, структура которого является оптимальным по Парето решением задачи (4.9) – (4.11).

С точки зрения анализа эффективности портфеля, обладающего наименьшим уровнем экономического риска (ЭР) и найденного теоретико-игровым методом, наиболее интересными и сложными являются следующие возможные случаи: 1) несовпадение структуры портфеля, обладающего наименьшим уровнем ЭР в модели Блэка, со структурой портфеля, обладающего наименьшим уровнем ЭР в модели Марковица; существование нескольких различных портфелей, обладающих наименьшим уровнем ЭР (разумеется, одним и тем же по своему значению) в соответствующей модели, при этом эффективным будет являться только один из них, а именно портфель, который обладает наибольшим значением ожидаемой нормы прибыли среди всех этих портфелей.

Перейдем к обоснованию эффективности такого портфеля  $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$  без риска. В этом случае невозможно улучшить (уменьшить) значение уровня ЭР портфеля. Портфель  $\mathbf{x} \in X^+$ , для которого справедливо соотношение  $R\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k R_i \cdot x_i \neq \text{const}$ , не может доминировать портфель  $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ , обладающий нулевым уровнем ЭР. Однако нельзя исключить возможность улучшения (увеличения) значения ожидаемой нормы прибыли портфеля при сохранении неухудшаемого (нулевого) уровня его ЭР. Согласно теореме 4.2, это невозможно, если ограничиваться портфелями, допустимыми в модели Марковица. Что касается портфелей, допустимых в модели Блэка, то, как показано в статье [67] А.В. Сигала, справедливы следующие утверждения.

**Теорема 4.4.** Пусть в АИ, заданной матрицей  $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{(2-k) \times n} = (r'_{ij})$ , где  $r'_{2i-1j} = r_{ij}$ ,  $r'_{2ij} = -r_{ij}$ ,  $r_{ij}$  — значения норм прибыли активов, отсутствует седловая точка, а второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, т.е.  $\text{supr } \mathbf{q}^* = \mathbf{J}$ . Тогда оптимальная стратегия  $\mathbf{p}^* = (p_1^*, \dots, p_{2k}^*)$  первого игрока позволяет найти структуру

портфеля  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_k^*)$ , где  $x_i^* = \frac{p_{2i-1}^* - p_{2i}^*}{\sum_{l=1}^k (p_{2l-1}^* - p_{2l}^*)}$ ,  $i = \overline{1, k}$ , обладающего

наименьшим уровнем ЭР в модели Блэка.

Как и в случае теоремы 4.2, при выполнении всех требований теоремы 4.4 вектор  $\mathbf{x}^*$ , построенный согласно приведенной в теореме 4.4 формуле, представляет собой портфель без риска: если в АИ, заданной матрицей  $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{(2-k) \times n} = (r'_{ij})$ , второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, то справедливо равенство

$$R_{\mathbf{x}^*}^* = \sum_{i=1}^k R_i \cdot x_i^* \equiv \frac{V_{\mathbf{R}'}^*}{\sum_{l=1}^k (p_{2l-1}^* - p_{2l}^*)} = \text{const}, \text{ где } V_{\mathbf{R}'}^* \text{ — цена АИ, заданной}$$

матрицей  $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{(2,k) \times n} = (r'_{ij})$ , поэтому справедливо равенство  $\min_{\mathbf{x}} \sigma_{\mathbf{x}}^2 = \sigma_{\mathbf{x}^*}^2 = \mathbf{D}(R_{\mathbf{x}}^*) = \mathbf{D}(\text{const}) = 0$ , где  $\sigma_{\mathbf{x}}^2$  — дисперсия СВ

$R_{\mathbf{x}}^* = \sum_{i=1}^k R_i \cdot x_i^*$ , характеризующей норму прибыли портфеля, облада-

ющего наименьшим уровнем ЭР. Если число  $\frac{V_{\mathbf{R}^*}}{\sum_{l=1}^k (p_{2,l-1}^* - p_{2,l}^*)}$  превы-

шает значение доходности любого безрискового актива, обращающегося на фондовом рынке, в этом случае формирование портфеля  $\mathbf{x}^*$  по формуле, приведенной в теореме 4.4, следует признать экономически корректным, экономически целесообразным, а также математически и экономически эффективным.

Возможность существования портфеля, допустимого в модели Блэка, для которого  $R_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^k R_i \cdot x_i \equiv c = \text{const} > \frac{V_{\mathbf{R}^*}}{\sum_{l=1}^k (p_{2,l-1}^* - p_{2,l}^*)}$ ,

или отсутствие такой возможности зависит от особенностей матрицы  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_k \times_n = (r_{ij})$ .

**Теорема 4.5.** Пусть в АИ, заданной матрицей  $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{(2,k) \times n} = (r'_{ij})$ , где  $r'_{2,i-1,j} = r_{ij}$ ,  $r'_{2,i,j} = -r_{ij}$ ,  $r_{ij}$  — значения норм прибыли активов, отсутствует седловая точка, а второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, т.е.  $\text{supp } \mathbf{q}^* = \mathbf{J}$ , а задача линейного программирования

$$g = u_{k+1} \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k r_{ij} \cdot u_i - u_{k+1} = 0, & j = \overline{1, k}, \\ \sum_{i=1}^k r_{ij} = 1, \end{cases}$$

разрешима. Тогда если  $\mathbf{u}^* = (u_1^*, \dots, u_{k+1}^*)$  — оптимальное решение этой задачи линейного программирования и выполняется равенство

$u_{k+1}^* = \frac{V_{\mathbf{R}^*}}{\sum_{l=1}^k (p_{2,l-1}^* - p_{2,l}^*)}$ , то оптимальная стратегия  $\mathbf{p}^* = (p_1^*, \dots, p_{2,k}^*)$  пер-

вого игрока в АИ, заданной матрицей  $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{(2,k) \times n} = (r'_{ij})$ , позволяет найти эффективный портфель в модели Блэка, а именно портфель

$\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_k^*)$  без риска, где  $x_i^* = \frac{p_{2,i-1}^* - p_{2,i}^*}{\sum_{l=1}^k (p_{2,l-1}^* - p_{2,l}^*)}$ ,  $i = \overline{1, k}$ .

Заметим, что суть теоремы 4.2 сводится к следующему утверждению: если в АИ  $\mathbf{GR} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ , где  $r_{ij}$  — значения норм прибыли активов, отсутствует седловая точка, а второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, оптимальная стратегия  $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_i^*; \dots; p_k^*)$  первого игрока задает решение задачи линейного программирования, участвующей в формулировке теоремы 4.5, с дополнительными требованиями неотрицательности  $u_i \geq 0$ ,  $i = 1, k$ , при этом  $u_{k+1}^* = V_{\mathbf{R}}^*$ .

Как отмечалось ранее, применение теоремы 4.2 не требует знания точных истинных законов распределений всех СВ, характеризующих нормы прибыли активов. По этой причине теорема 4.2 позволяет обобщить традиционную модель Марковица на случай, когда неизвестны значения вероятностей состояний экономической среды (фондового рынка). Так, модель задачи поиска структуры эффективного портфеля в поле пятой ИС представляет собой задачу (4.13) — (4.19) трехкритериальной оптимизации. Аналогично, модель задачи поиска структуры эффективного портфеля в поле пятой ИС представляет собой задачу (4.20) — (4.26), в которой одним из критериев участвует энтропия Шеннона, значение которой, согласно принципу максимума Гиббса — Джейнса, требуется максимизировать.

Для обобщенных моделей поиска эффективного портфеля понятие «эффективного портфеля» следует признать неоднозначным. В случае четвертой ИС можно придерживаться следующей терминологии. *Эффективным портфелем в обобщенной модели Марковица в поле четвертой ИС для заданного распределения  $\mathbf{q}$  вероятностей состояний* будем называть портфель  $\mathbf{x}$ , являющийся оптимальным по Парето решением задачи (4.9) — (4.12), полученной из задачи (4.20) — (4.26) подстановкой значений всех числовых характеристик  $t_i, \sigma_i^2, c_{ij}$ , вычисленных для заданного распределения  $\mathbf{q}$ . *Эффективным портфелем в обобщенной модели Марковица в поле четвертой ИС для любого распределения  $\mathbf{q}$  вероятностей состояний* будем называть такой портфель  $\mathbf{x}$ , для которого любой вектор  $(\mathbf{q}; \mathbf{x})$  для всех допустимых распределений  $\mathbf{q}$  является оптимальным по Парето решением задачи (4.20) — (4.26).

Непосредственно из теоремы 4.2 вытекает следующее утверждение.

**Теорема 4.6.** Пусть в игре  $\mathbf{GR} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ , где  $r_{ij}$  — значения норм прибыли активов, отсутствует седловая точка, а второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, т.е.  $\sup \mathbf{q}^* = \mathbf{J}$ . Тогда оптимальная стратегия  $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_i^*; \dots; p_k^*)$  первого игрока задает



эффективный портфель в обобщенной модели Марковица (4.20) — (4.26) в поле четвертой ИС для любого распределения  $\mathbf{q}$  вероятностей состояний, а именно структуру портфеля  $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$  без риска.

Таким образом, можно утверждать: если справедливы все требования теоремы 4.6, то структура портфеля без риска всегда будет одной и той же и будет совпадать с оптимальной стратегией первого игрока в соответствующей АИ, при этом этот портфель без риска будет эффективным портфелем в модели Марковица для всех допустимых распределений вероятностей состояний экономической среды.

Как отмечалось выше, в случае задачи поиска структуры эффективного портфеля в поле пятой ИС процесс принятия решений осуществляется по правилам решения АИ. Этот факт приводит к следующему определению эффективности портфеля для полученной обобщенной модели Марковица. *Эффективным портфелем в обобщенной модели Марковица в поле пятой ИС* будем называть такой портфель  $\mathbf{x}$ , для которого вектор  $\mathbf{p} = \mathbf{x}$  характеризует оптимальную стратегию первого игрока в АИ  $\mathbf{GR} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$ , где  $r_{ij}$  — значения норм прибыли активов.

Если АИ  $\mathbf{GR} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$  имеет седловую точку, для этой игры существует решение в чистых стратегиях, а оптимальной стратегией первого игрока будет его максиминная чистая стратегия, при этом эффективный портфель в обобщенной модели Марковица в поле пятой ИС будет однородным портфелем, а именно портфелем, составленным из актива  $i^*$ , соответствующего максиминной чистой стратегии первого игрока. В случае наличия в платежной матрице  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$  нескольких седловых элементов ситуация с выбором наиболее надежного актива становится менее определенной.

Если АИ  $\mathbf{GR} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$  не имеет седловой точки, при этом в ней ситуация равновесия  $(\mathbf{p}^*; \mathbf{q}^*)$  является единственной, то оптимальная стратегия  $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$  первого игрока задает единственный эффективный портфель. Очевидно, при этом портфель  $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$  не обязательно окажется портфелем без риска. Если в АИ  $\mathbf{GR} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$  второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, то оптимальная стратегия  $\mathbf{p}^* = (p_1^*; \dots; p_i^*; \dots; p_k^*)$  первого игрока задает эффективный портфель без риска.

Если игра  $\mathbf{GR} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$  не имеет седловой точки, при этом в ней несколько различных ситуаций равновесия, то для окончательного выбора структуры эффективного портфеля следует оптимизировать значение критерия (4.13) на множестве оптимальных стратегий первого игрока для некоторой оптимальной стратегии второго игрока.

Если в поле четвертой ИС наиболее типичную точечную оценку распределения вероятностей состояний экономической среды задает вектор  $\hat{\mathbf{q}} = \left(\frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \mathbf{J}_n$ , который максимизирует значение энтропии Шеннона, то в поле пятой ИС это будет оптимальная стратегия  $\mathbf{q}^*$  второго игрока.

В поле пятой ИС игра  $\mathbf{GR} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$  является моделью задачи поиска эффективного портфеля, тогда как в поле других ИС игру  $\mathbf{GR} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$  нельзя считать моделью этой задачи: в поле других ИС игра  $\mathbf{GR} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{R} \rangle$  лишь характеризует ситуацию принятия решений о формировании эффективного портфеля. В поле других ИС теоретико-игровой метод поиска эффективного портфеля может применяться лишь как инструмент: решение соответствующей АИ при соблюдении соответствующих требований позволяет найти (для любого распределения вероятностей состояний экономической среды) эффективный портфель (всегда являющийся портфелем, обладающим наименьшим уровнем ЭР), что и обосновывает корректность применения теоретико-игрового подхода в этих случаях.

#### **4.10. ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛ ФИШБЕРНА И ИХ ЭНТРОПИЙНЫЕ СВОЙСТВА**

**4.10.1.** Рассмотрим критерии принятия решений в поле третьей ИС  $I_3$ . Для третьей ИС характерно то, что априори закон распределения вероятностей состояний экономической среды («природы») неизвестен, но известны некоторые соотношения между вероятностями этих состояний.

Считается, что в поле третьей ИС на основе вербальной (или статистической) информации можно на качественном уровне установить приоритетность состояний экономической среды. То есть для каждой пары состояний экономической среды можно указать, какое из них имеет больший приоритет (в плане большей вероятности наступления), или что они являются эквивалентными (имеют одинаковую вероятность наступления). Если сравнивать два состояния экономической среды  $j_1$  и  $j_2$  и ввести символы приоритетности «>» и эквивалентности «~», то справедливо или  $j_1 > j_2$ , или  $j_2 > j_1$ , или  $j_1 \sim j_2$ .

Рассуждая аналогично, для всех состояний экономической среды можно построить ряд приоритета, т.е. вектор следующего вида:

$$\mathbf{RI} = (j_1; j_2; \dots; [j_i; j_{i+1}]; \dots; j_n), \quad (4.28)$$

где  $j_1$  — состояние экономической среды с наибольшим приоритетом (с наибольшей вероятностью наступления);  $j_n$  — состояние с наиболее низким приоритетом (с наименьшей вероятностью наступления);  $[j_i; j_{i+1}]$  — квадратными скобками выделяются эквивалентные состояния (т.е.  $j_i \sim j_{i+1}$ ).

Итак, согласно построенному ряду приоритетов можно утверждать, что  $q_{j_1} \geq q_{j_2} \geq \dots \geq q_{j_n}$ , т.е. имеет место *простое линейное отношение порядка*. Без ограничения общности можно считать, что возможные состояния экономической среды упорядочены так, что для значений вероятностей  $q_j$  справедливы соотношения  $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$ . Приведем основные отношения порядка на компонентах вектора  $\mathbf{q} = (q_1; q_2; \dots; q_j; \dots; q_n)$  априорного распределения вероятностей возможных состояний экономической среды. Далее везде будем считать, что значения вероятностей  $q_j$  задают значения членов некоторой последовательности  $\{q_j\}_{j=1}^n$ . Приведем определения наиболее распространенных типов линейных отношений порядка [82, с. 78].

*Простым линейным отношением порядка* называют соотношения, которым должны удовлетворять значения членов последовательности  $\{q_j\}_{j=1}^n$ , выражающиеся неравенствами  $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_j \geq \dots \geq q_n$  или  $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_j \leq \dots \leq q_n$ . *Частично усиленным линейным отношением порядка* называют соотношения, которым должны удовлетворять значения членов последовательности  $\{q_j\}_{j=1}^n$ , выражающиеся неравенствами  $q_j \geq q_{j+1} + \dots + q_n, j = \overline{1, n-1}$ , или  $q_j \geq q_1 + \dots + q_{j-1}, j = \overline{2, n}$ . *Усиленным линейным отношением порядка* называют соотношения, которым должны удовлетворять значения членов последовательности  $\{q_j\}_{j=1}^n$ , выражающиеся неравенствами  $q_{j+1} + \dots + q_{j+\alpha(j)} \leq q_j \leq q_{j+1} + \dots + q_{j+\alpha(j)} + q_{j+\alpha(j)+1}, j = \overline{1, n-1}$ ,  $\alpha(j) \in \{1; 2; \dots; n-1-j\}$ , или  $q_{j-\alpha(j)} + \dots + q_{j-1} \leq q_j \leq q_{j-\alpha(j)-1} + q_{j-\alpha(j)} + \dots + q_{j-1}, j = \overline{3, n}$ ,  $\alpha(j) \in \{1; 2; \dots; j-2\}$ , где  $\alpha(j)$  — заданные натуральные числа, принимающие для всех допустимых значений индекса  $j$  значения из указанных множеств. *Однородным линейным отношением порядка* называют соотношения, которым должны удовлетворять значения членов последовательности  $\{q_j\}_{j=1}^n$ , выражающиеся неравенствами  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{q}^T \leq \mathbf{q}^T \leq \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}^T$ , где  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  — заданные неотрицательные матрицы, т.е.  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{n \times n} = (a_{ij}), a_{ij} \geq 0, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{n \times n} = (b_{ij}), b_{ij} \geq 0, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$ . *Полным линейным отношением*

*порядка* называют соотношения, которым должны удовлетворять значения членов последовательности, выражающиеся неравенствами  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{q}^T + \mathbf{a} \leq \mathbf{q}^T \leq \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}^T + \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  — заданные квадратные матрицы соответствующего порядка,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  — заданные векторы-столбцы соответствующей размерности.

Эти отношения порядка были подробно изучены П. Фишберном и приведены, например, в монографии Рудольфа Ивановича Трухаева [82, с. 77–80]. Формулы, предложенные П. Фишберном и приведенные в монографии Р.И. Трухаева [82, с. 77–80], а также их обобщения можно применять, например, для вычисления значений компонент вектора, характеризующего априорное распределение вероятностей возможных состояний фондового рынка, что, как показано в работе А.В. Сигала [66], позволяет приводить обобщенные модели Марковица задачи поиска эффективного портфеля, заданные в поле третьей ИС, к классической модели Марковица задачи поиска эффективного портфеля.

Как отмечает Р.И. Трухаев, «линейные отношения порядка приведены в порядке возрастания общности. Например, простое и усиленное линейные отношения порядка содержатся в однородном при соответствующем задании матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ » [82, с. 78]. Р.И. Трухаев приводит основные точечные оценки распределения априорных вероятностей состояний экономической среды в поле третьей ИС, т.е. для приведенных выше отношений порядка [82, с. 84–85]. Эти оценки распределения априорных вероятностей состояний экономической среды в монографии Р.И. Трухаева названы *точечными оценками Фишберна*, точнее *точечными оценками Фишборна*. Дело в том, что Р.И. Трухаев применял написание фамилии Питера Фишберна через букву «о»: Фишборн. Однако начиная с 1978 года, когда в СССР был издан перевод [86] на русский язык монографии этого автора, в русскоязычной литературе принято написание этой фамилии через букву «е»: Фишберн. Точечные оценки Фишберна далее для удобства будем называть *формулами Фишберна*. Формулы Фишберна позволяют простым и естественным способом вычислить оценки значений вероятностей состояний экономической среды, если для этих вероятностей задан тот или иной вектор приоритетов, т.е. то или иное отношение порядка.

Очевидно, однородное линейное отношение порядка можно представить в покомпонентном виде:  $\sum_{j=1}^n (a_{ij} \cdot q_j) \leq q_i \leq \sum_{j=1}^n (b_{ij} \cdot q_j)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Частным случаем общего линейного отношения порядка яв-

ляется *интервальное отношение порядка*, согласно которому справедливы соотношения  $a_j \leq q_j \leq b_j = a_j + \varepsilon_j, j = \overline{1, n}$ , где  $a_j, b_j$  — заданные числа такие, что  $a_j > 0, j = \overline{1, n}, \varepsilon_j = b_j - a_j \geq 0, j = \overline{1, n}$ .

Рассмотрим некоторые свойства энтропии Шеннона, характеризующие ее асимптотическое поведение для некоторых оценок распределения вероятностей, которые будут рассмотрены в этом пункте. Знание этих свойств является полезным для энтропийного анализа информационных ситуаций. Как известно, значение энтропии Шеннона характеризует хаотичность найденной оценки неизвестного распределения вероятностей состояний экономической среды.

Очевидно, чем ближе для найденной оценки распределения вероятностей значение энтропии Шеннона к числу 0, тем меньшей степенью хаотичности характеризуется процесс принятия управленческих решений. Иначе говоря, тем более полной является имеющаяся у лица, принимающего решения (ЛПР), информация. Аналогично, чем ближе для найденной оценки распределения вероятностей значение энтропии Шеннона к возможному максимуму, т.е. к числу  $\ln n$ , тем большей степенью хаотичности характеризуется процесс принятия управленческих решений, т.е. тем менее полной является имеющаяся у ЛПР информация.

Более точным числовым выражением удаленности найденной оценки распределения вероятностей состояний экономической среды от равномерного распределения вероятностей, характеризующегося максимальным значением хаотичности, может служить, например, значение расстояния Кульбака — Лейблера (1.14).

Пусть  $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_j, \dots, \hat{q}_n$  — оценки неизвестных значений компонент вектора  $\mathbf{q} = (q_1; q_2; \dots; q_j; \dots; q_n)$ , характеризующего априорное распределение вероятностей возможных состояний экономической среды. Как отмечалось ранее, для случая простого линейного отношения порядка П. Фишберн предложил считать, что оценки  $\hat{q}_j$  неизвестных значений вероятностей состояний экономической среды образуют арифметическую прогрессию, а для случая частично усиленного линейного отношения порядка — монотонную геометрическую прогрессию. Если соответствующие последовательности представляют собой убывающие прогрессии, то формулы

$$\hat{q}_j = \frac{2 \cdot (n - j + 1)}{n \cdot (n + 1)}, j = \overline{1, n}, \quad (4.29)$$

и

$$\hat{q}_j = \frac{2^{n-j}}{2^n - 1}, j = \overline{1, n}, \quad (4.30)$$

принято называть *первой* и *второй формулой Фишберна*.

В экономических исследованиях принято считать, что формула (4.29) отражает тот факт, что об уровне значимости альтернатив (например, возможных состояний экономической среды; моделируемых систем; рассматриваемых показателей; анализируемых проектов и т.п.) не известно ничего, кроме того, что они расположены в порядке убывания уровня значимости. Формула (4.30) отражает тот факт, что уровень значимости очередной альтернативы не меньше совокупного (суммарного) уровня значимости всех последующих альтернатив, вместе взятых.

Предварительно отметим некоторые характерные свойства прогрессий (4.29) и (4.30). Разность убывающей арифметической прогрессии (4.29) равна  $x = -\frac{2}{n \cdot (n+1)}$ , при этом выполняется равенство

$$\hat{q}_n = \frac{2}{n \cdot (n+1)} = -x = |x|. \text{ Знаменатель убывающей геометрической}$$

$$\text{прогрессии (4.30) равен } x = \frac{1}{2} = 0,5, \text{ откуда } \hat{q}_{n-1} - \hat{q}_n = \hat{q}_{n-1} - \hat{q}_{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \\ = \hat{q}_{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \hat{q}_n = \frac{1}{2^n - 1}.$$

**4.10.2. Прогрессией Фишберна** будем называть последовательность  $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$ , заданную формулой (4.29) или (4.30): *арифметической прогрессией Фишберна* — последовательность, заданную формулой (4.29), *геометрической прогрессией Фишберна* — последовательность, заданную формулой (4.30).

Подчеркнем, предположение П. Фишберна о том, что величины (оценки)  $\hat{q}_j$  в случае линейного отношения порядка образуют арифметическую прогрессию, а в случае частично усиленного линейного отношения порядка — монотонную геометрическую прогрессию, приводящее к удобным оценкам, не базируется на принципе максимальной неопределенности Гиббса — Джейнса. Однако некоторые исследователи высказывают мнение, что формула (4.30) «отвечает максимуму энтропии наличной информационной неопределенности об объекте исследования» [48, с. 14]. Точку зрения, аналогичную приведенному мнению А.О. Недосекина, на энтропийный смысл формул Фишберна высказывают, например,

Д.В. Рач [58] и Л.Ж. Сидоренко [74]. Но такое суждение следует признать ошибочным. Р.И. Трухаев отмечает, что «Фишборн основывал свои оценки неконструктивным способом на основе аксиом теории аддитивной полезности» [82, с. 85]. Кроме того, хорошо известно, что если выполняется условие нормировки, то энтропия

Шеннона  $H(\mathbf{q}) = -\sum_{j=1}^n q_j \cdot \ln q_j$  достигает своего максимального значения

для равномерного распределения  $\hat{q}_j^* = \frac{1}{n}, j = \overline{1, n}$ , которое, очевидно, удовлетворяет простому линейному отношению порядка. Как показано в статье В.Н. Лившица и А.В. Сигала [37], для  $n = 5$  энтропия Шеннона равна  $H(\hat{\mathbf{q}}) \approx 1,48975$  для оценок  $\hat{q}_j$ , вычисленных по формуле (4.29), и  $H(\hat{\mathbf{q}}) \approx 1,24275$  для оценок  $\hat{q}_j$ , вычисленных по формуле (4.30), в то время как для  $n = 5$  максимальное значение энтропии Шеннона равно  $H(\hat{\mathbf{q}}^*) = -\sum_{j=1}^5 \frac{1}{5} \cdot \ln \frac{1}{5} = \ln 5 \approx 1,60944$ . Таким образом, предположение П. Фишберна о том, что величины (оценки)  $\hat{q}_j$  образуют арифметическую прогрессию для случая линейного отношения порядка, и монотонную геометрическую прогрессию — для случая частично усиленного линейного отношения порядка, не базируется на принципе максимальной неопределенности Гиббса — Джейнса.

Если на вербальном уровне сформирован ряд приоритета **RI** и ЛПР владеет небольшой по объему статистической информацией (которой еще недостаточно для статистической оценки распределения вероятностей), то можно на основе этой информации осуществить количественное уточнение ряда приоритетов (4.28), которое имеет вид:

$$\mathbf{RV} = (v_{j_1}; v_{j_2}; \dots; v_{j_n}), \quad (4.31)$$

где  $v_{j_l}$  — числовые оценки результатов последовательных парных сравнений между собой состояний экономической среды с точки зрения возможности их наступления. Например, если  $v_{j_l} = t$ , то вероятность наступления состояния  $j_l$  в  $t$  раз больше вероятности наступления состояния  $j_{l+1}$ . Если  $v_{j_l} = 1$ , то значения вероятностей наступления состояний  $j_l$  и  $j_{l+1}$  совпадают между собой.

Очевидно, что с учетом предположения  $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$  для пар заданных множеств  $\{\mathbf{RI}; \mathbf{RV}\}$  все компоненты  $v_j \geq 1, j = \overline{1, n}$ . Если (для удобства) считать  $v_n = 1$ , то для вычисления соответствующих

точечных и, в определенной мере, субъективных оценок вероятностей можно применить формулу

$$q_j \approx \hat{q}_j = \frac{\prod_{l=j}^n v_l}{\sum_{s=1}^n \prod_{l=s}^n v_l}, j = \overline{1, n}.$$

Если имеет место усиленное линейное отношение порядка вида  $q_{j+1} + \dots + q_{j+\alpha} \leq q_j \leq q_{j+1} + \dots + q_{j+\alpha} + q_{j+\alpha+1}$ ,  $j = \overline{1, n-\alpha-1}$ , то в этом случае Фишберн предложил следующую схему вычисления значений оценок вероятностей. Следует вычислить выражения  $\hat{q}_j = \hat{d}_j \cdot \lambda$ ,  $j = \overline{1, n}$ , зависящие от параметра (множителя)  $\lambda$ , двигаясь в следующем порядке: начиная с элементов с номерами  $n, n-1$  к элементу с номером  $n-\alpha$ , а затем начиная с элемента с номером  $n-\alpha-1$  к элементу с номером 1. При этом следует применять следующие рекуррентные соотношения:

$$\hat{q}_n = \lambda, \hat{q}_j = \hat{q}_{j+1} + \dots + \hat{q}_n + \lambda, j = \overline{n-\alpha, n-1},$$

$$\hat{q}_j = \hat{q}_{j+1} + \dots + \hat{q}_{j+\alpha} + \frac{1}{2} \cdot \hat{q}_{j+\alpha+1}, j = \overline{1, n-\alpha-1}.$$

При этом для вычисления значений оценок  $\hat{q}_j$  следует применять следующую формулу:

$$\hat{q}_j = \frac{\hat{d}_j}{\sum_{s=1}^n \hat{d}_s}, j = \overline{1, n}. \quad (4.32)$$

Суть формулы (4.32) очевидна: это — нормировка значений чисел  $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$ , являющихся найденными значениями выражений  $\hat{q}_j = \hat{d}_j \cdot \lambda$ ,  $j = \overline{1, n}$ , зависящих от параметра  $\lambda$ , позволяющая избавиться от параметра  $\lambda$  (фактически найти его значение) и добиться справедливости равенства  $\sum_{j=1}^n \hat{q}_j = 1$ , т.е. условия нормировки. Формулу (4.32) будем называть *третьей формулой Фишберна*. В приведенной схеме вычисления значений оценок вероятностей для случая усиленного линейного отношения порядка третья формула Фишберна носит вспомогательный характер и лишь позволяет найти значение параметра  $\lambda$ ,



от которого зависят значения соответствующих точечных оценок  $\hat{q}_j = \hat{d}_j \cdot \lambda, j = \overline{1, n}$ .

Например, если  $n = 5$  и  $\alpha = 2$ , то получим следующие соотношения:

$$\hat{q}_5 = \lambda, \hat{q}_4 = \hat{q}_5 + \lambda = \lambda + \lambda = 2 \cdot \lambda, \hat{q}_3 = \hat{q}_4 + \hat{q}_5 + \lambda = 2 \cdot \lambda + \lambda + \lambda = 4 \cdot \lambda,$$

$$\hat{q}_2 = \hat{q}_3 + \hat{q}_4 + \frac{1}{2} \cdot \hat{q}_5 = 4 \cdot \lambda + 2 \cdot \lambda + \frac{1}{2} \cdot \lambda = 6,5 \cdot \lambda,$$

$$\hat{q}_1 = \hat{q}_2 + \hat{q}_3 + \frac{1}{2} \cdot \hat{q}_4 = 6,5 \cdot \lambda + 4 \cdot \lambda + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \lambda = 11,5 \cdot \lambda,$$

откуда  $\sum_{j=1}^5 \hat{q}_j = 25 \cdot \lambda$ . Следовательно, нормировка найденных выражений  $\hat{q}_j = \hat{d}_j \cdot \lambda, j = \overline{1, 5}$ , т.е. непосредственное применение формулы (4.32), позволяет найти следующие значения оценок вероятностей:

$$\hat{q}_1 = \frac{11,5 \cdot \lambda}{25 \cdot \lambda} = 0,46, \hat{q}_2 = \frac{6,5 \cdot \lambda}{25 \cdot \lambda} = 0,26, \hat{q}_3 = \frac{4 \cdot \lambda}{25 \cdot \lambda} = 0,16,$$

$$\hat{q}_4 = \frac{2 \cdot \lambda}{25 \cdot \lambda} = 0,08, \hat{q}_5 = \frac{\lambda}{25 \cdot \lambda} = 0,04.$$

Теперь если считать, что  $X$  — СВ, заданная законом распределения вероятностей, найденным согласно этой формуле для  $n = 5$  и  $\alpha = 2$ ,  $Y$  — соответствующая равномерно распределенная дискретная СВ, то имеем  $H(\hat{\mathbf{q}}) \approx 1,331469$ ,  $D_{KL}(X, Y) \approx 0,2780$ ,  $D_{KL}(Y, X) \approx 0,3307$ . Очевидно, это распределение вероятностей обладает существенно меньшим уровнем хаотичности по сравнению с уровнем хаотичности оценки распределения вероятностей, найденной согласно первой формуле Фишберна для  $n = 5$ , и одновременно большим уровнем хаотичности по сравнению с уровнями хаотичности оценок распределения вероятностей, найденным согласно двум другим рассмотренным выше оценкам распределения вероятностей по соответствующим формулам для  $n = 5$ .

Отметим, что именно применение формулы (4.32) позволяет получить формулу для вычисления значений оценок  $\hat{q}_j$  в случае, когда известен ряд бинарных отношений приоритета. Если ряд бинарных отношений приоритета, т.е. вектор  $\mathbf{RV} = (v_1; v_2; \dots; v_n)$ , из-

вестен, то для вычисления значений оценок  $\hat{q}_j$  в формулу (4.32) вместо чисел  $\hat{d}_j$  следует подставить значения  $\hat{d}_j = \prod_{l=j}^n v_l$ , т.е. в этом случае значения оценок  $\hat{q}_j$  могут быть найдены по вышеприведенной формуле:

$$\hat{q}_j = \frac{\prod_{l=j}^n v_l}{\sum_{s=1}^n \prod_{l=s}^n v_l}, j = \overline{1, n}.$$

Еще одним распространенным и важным случаем является ситуация, когда ЛПР может указать интервалы, которым принадлежат вероятности состояний экономической среды,

$$a_j \leq q_j \leq b_j, j = \overline{1, n},$$

т.е. имеет место *интервальное отношение порядка*. В этом случае Фишберн для получения точечной оценки априорного распределения вероятности предложил формулу

$$\hat{q}_j = a_j + \frac{1 - \sum_{s=1}^n a_s}{\sum_{s=1}^n (b_s - a_s)} \cdot (b_j - a_j), j = \overline{1, n}. \quad (4.33)$$

При этом должны выполняться соотношения  $\sum_{s=1}^n (b_s - a_s) > 0$ ,  $\sum_{s=1}^n a_s \leq 1$ ,  $\sum_{s=1}^n b_s \geq 1$ . Формулу (4.33) будем называть *четвертой формулой Фишберна*.

Можно доказать (см., например, [69, с. 111]), что для вектора  $\hat{\mathbf{q}}$ , значения компонент которого найдены по формуле (4.29), справедливы неравенства  $\ln \frac{n+1}{2} \leq H(\hat{\mathbf{q}}) \leq \ln n$ , откуда  $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\hat{\mathbf{q}}) = +\infty$ , т.к.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \frac{n+1}{2} = +\infty$  и  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$ ; в этом случае значение энтропии Шеннона и хаотичность неограниченно возрастают, при этом справедливо приближенное равенство  $H(\hat{\mathbf{q}}) \approx \ln n - c_n$ , где последовательность  $c_n$  является ограниченной:  $0 \leq c_n \leq \ln 2$ . Для удобства можно считать справедливым приближенное равенство  $H(\hat{\mathbf{q}}) \approx \ln n$ .

Действительно, из справедливости неравенств  $\frac{\ln \frac{n+1}{2}}{\ln n} \leq \frac{H(\hat{\mathbf{q}})}{\ln n} \leq 1$  следует справедливость предельного соотношения  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H(\hat{\mathbf{q}})}{\ln n} = 1$ .

Аналогично, можно доказать (см., например, [69, с. 111–112]), что для вектора  $\hat{\mathbf{q}}$ , значения компонент которого найдены по формуле (4.30), справедливо предельное соотношение  $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\hat{\mathbf{q}}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n - 1} \right) \cdot \ln 2 = 2 \cdot \ln 2 = \ln 4 \approx 1,386294$ , т.е. значение энтропии Шеннона и хаотичность фактически остаются постоянными и характеризуются малым, по сравнению с максимально возможным, уровнем (по сравнению с числом  $\ln n$ ), при этом справедливо приближенное равенство

$$H(\hat{\mathbf{q}}) \approx \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n - 1} \cdot \ln 2 \approx \ln 4 \approx 1,386294.$$

Рассчитаем значения энтропии Шеннона для  $n = \overline{5, 10}$  в случае оценок распределений вероятностей, найденных согласно первой формуле Фишберна (таблица 4.5) и второй формуле Фишберна (таблица 4.6). Найденные значения энтропии Шеннона сравним со значениями соответствующих асимптотических оценок, при этом оценим точность асимптотических оценок значениями погрешностей: абсолютных погрешностей ( $\Delta$ ) и относительных, измеренных в процентах, погрешностей  $\left( \delta = \frac{|\Delta|}{H(\hat{\mathbf{q}})} \cdot 100 \% \right)$ .

Таблица 4.5

**Значения энтропии Шеннона для оценок распределения вероятностей, найденных согласно первой формуле Фишберна**

$n$	$H(\hat{\mathbf{q}})$	Асимптотическая оценка	$\Delta$	$\delta$ (%)
5	1,489750	1,609438	0,119588	8,0341
6	1,662377	1,791759	0,129382	7,7830
7	1,809118	1,945910	0,136792	7,5613
8	1,936798	2,079442	0,142644	7,3649
9	2,049841	2,197225	0,147384	7,1900
10	2,151282	2,302585	0,151303	7,0332

Таблица 4.6

**Значения энтропии Шеннона для распределений вероятностей,  
оцененных согласно второй формуле Фишберна**

$n$	$H(\hat{\mathbf{q}})$	Асимптотическая оценка	$\Delta$	$\delta$ (%)
5	1,242748	1,274496	0,031748	2,5547
6	1,304532	1,320280	0,015748	1,2072
7	1,340246	1,348089	0,007843	0,5852
8	1,360635	1,364548	0,003913	0,2876
9	1,372131	1,374086	0,001955	0,1425
10	1,378542	1,379519	0,000977	0,0709

Итак, наибольшим уровнем хаотичности характеризуется процесс принятия решений, для которого неизвестное распределение вероятностей состояний экономической среды оценивается согласно первой формуле Фишберна ( $H(\hat{\mathbf{q}}) \approx \ln n$ ), а наименьшим уровнем хаотичности характеризуется процесс принятия решений, для которого распределение вероятностей состояний экономической среды оценено согласно второй формуле Фишберна ( $H(\hat{\mathbf{q}}) \approx \ln 4$ ).

**4.10.3.** Рассмотрим ситуацию, когда соответствующие последовательности  $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$ , т.е. векторы  $\hat{\mathbf{q}} = (\hat{q}_1; \hat{q}_2; \dots; \hat{q}_j; \dots; \hat{q}_n)$ , оценивающие априорные распределения вероятностей возможных состояний экономической среды, представляют собой возрастающие прогрессии. В этом случае формулы Фишберна (4.29), (4.30) принимают следующий вид:

$$\hat{q}_j = \frac{2 \cdot j}{n \cdot (n+1)}, j = \overline{1, n}, \quad (4.34)$$

$$\hat{q}_j = \frac{2^{j-1}}{2^n - 1}, j = \overline{1, n}. \quad (4.35)$$

Как отмечалось, формула (4.29) отражает тот факт, что об уровне значимости альтернатив (например, возможных состояний экономической среды; моделируемых систем; рассматриваемых показателей; анализируемых проектов и т.п.) не известно ничего, кроме того, что они расположены в порядке убывания уровня значимости. Формула (4.30) отражает тот факт, что уровень значимости очередной альтернативы не меньше совокупного (суммарного) уровня значимости всех последующих альтернатив, вместе взятых. Анало-

гично можно интерпретировать формулы (4.34) и (4.35). Заметим, в определенных ситуациях применение формул (4.34) и (4.35) предпочтительнее применения формул (4.29) и (4.30) соответственно. Например, при исследовании динамических рядов, когда натуральные значения индекса  $j$  задают дискретные моменты времени, применение формул (4.34) и (4.35) явно предпочтительнее применения соответствующих формул (4.29) и (4.30). Во-первых, в связи с тем, что, как правило, ситуация, сложившаяся в предшествующий момент времени, более удаленный от настоящего момента времени, оказывает на нынешнюю ситуацию меньшее влияние, чем ситуация, сложившаяся в предшествующий момент времени, более приближенный к настоящему моменту времени. Во-вторых, по причине нежелательности перенумерации упорядоченных хронологически дискретных моментов времени.

Итак, выше введено понятие прогрессий Фишберна: *прогрессии Фишберна* — это последовательности, определяемые формулой (4.29) или формулой (4.30), *арифметические прогрессии Фишберна* — это последовательности, определяемые формулой (4.29), *геометрические прогрессии Фишберна* — это последовательности, определяемые формулой (4.30). В литературе, посвященной математическому моделированию принятия решений в условиях неопределенности, нередко применяют прогрессии Фишберна, особенно прогрессии (4.29) и (4.34).

К примеру, А.О. Недосекиным [48] была предложена нечетко-множественная модель корпоративного финансового менеджмента, в которой для комплексной оценки финансового состояния предприятия разработаны две системы весов для свертки отдельных элементов матрицы в единый комплексный показатель, при этом в качестве одной из этих систем им предложена система весов Фишберна, т.е. коэффициентов, вычисляемых согласно первой формуле Фишберна.

Это и другие исследования, в которых используются точечные оценки Фишберна, свидетельствуют о том, что эти формулы представляют определенный интерес для математического моделирования социально-экономических и технических систем, процессов и явлений, в частности для принятия управленческих решений в экономике.

Формулы (4.29) и (4.34), как, соответственно, и формулы (4.30) и (4.35), несложно обобщить (см., например, [70, с. 106–138]) на случай монотонных прогрессий, удовлетворяющих лишь условию нормировки

$$\sum_{j=1}^n \hat{q}_j = 1, \quad (4.36)$$

и

$$\hat{q}_j \geq 0, j = \overline{1, n}, \quad (4.37)$$

требованиям неотрицательности всех членов прогрессии.

*Обобщенной прогрессией Фишберна* будем называть прогрессию  $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$ , удовлетворяющую всем ограничениям (4.36) и (4.37): *обобщенной арифметической прогрессией Фишберна* — арифметическую прогрессию, удовлетворяющую всем ограничениям (4.36) и (4.37), *обобщенной геометрической прогрессией Фишберна* — геометрическую прогрессию, удовлетворяющую всем ограничениям (4.36) и (4.37).

Обобщенная арифметическая прогрессия Фишберна представляет собой арифметическую прогрессию вида (см., например, [70, с. 109–110])

$$\hat{q}_j = \frac{1}{n} - \frac{(n-1) \cdot x}{2} + (j-1) \cdot x = \frac{2 - n \cdot (n-2 \cdot j + 1) \cdot x}{2 \cdot n}, j = \overline{1, n}, \quad (4.38)$$

разность которой удовлетворяет соотношениям

$$|x| \leq \frac{2}{n \cdot (n-1)}, \text{ если } n \in \mathbf{N}, n > 1, \quad (4.39)$$

а обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна представляет собой геометрическую прогрессию вида (см., например, [70, с. 110–111])

$$\hat{q}_j = \frac{x-1}{x^n - 1} \cdot x^{j-1} = \frac{1-x}{1-x^n} \cdot x^{j-1}, j = \overline{1, n}, \quad (4.40)$$

знаменатель которой удовлетворяет соотношению

$$x > 0. \quad (4.41)$$

Подобно прогрессиям Фишберна, обобщенные прогрессии Фишберна применяются при математическом моделировании разнообразных явлений и процессов экономики и техники, в т.ч. при моделировании принятия решений в условиях неопределенности.

Например, в статье А.В. Сигала [66] рассматриваются две основные обобщенные модели Марковица задачи поиска эффективного портфеля в поле третьей ИС: одна — с простым линейным отношением порядка, другая — с частично усиленным линейным отношением порядка. В этой статье обоснована корректность приведения обобщенных моделей Марковица в поле третьей ИС к классической модели Марковица на основе оценки значений вероятностей значениями элементов соответствующей обобщенной прогрессии Фишберна.

Основные свойства обобщенных прогрессий Фишберна приведены, например, в монографии [70, с. 114–117]. Важно учитывать, что члены произвольной обобщенной арифметической прогрессии Фишберна обязательно удовлетворяют соответствующему простому линейному отношению порядка, а члены обобщенной геометрической прогрессии Фишберна удовлетворяют соответствующему частично усиленному линейному отношению порядка не всегда, а только если знаменатель обобщенной геометрической прогрессии Фишберна удовлетворяет определенным требованиям. Справедливо следующее утверждение (см., например, [70, с. 119–123]).

**Теорема 4.7.** Произвольная обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна  $\{\hat{q}_i\}_{i=1}^n$  удовлетворяет соответствующему частично усиленному линейному отношению порядка тогда и только тогда, когда значение знаменателя геометрической прогрессии (4.40) удовлетворяет соотношениям  $x \in (0; \alpha_n] \cup \left[ \frac{1}{\alpha_n}; +\infty \right)$ , где  $\alpha_n$  — корень уравнения  $x^n - 2 \cdot x + 1 = 0$ , удовлетворяющий соотношениям  $0,5 < \alpha_n \leq 1$ . Последовательность  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  представляет собой строго убывающую ограниченную последовательность, предел которой равен  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0,5$ .

Ответ на вопрос о максимизации значения энтропии Шеннона на множестве всех обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, удовлетворяющих соответствующему частично усиленному линейному отношению порядка, дает следующее утверждение (см., например, [70, с. 124–127]).

**Теорема 4.8.** Задача максимизации энтропии Шеннона на множестве невозрастающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна  $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$ , удовлетворяющих частично усиленному линейному отношению порядка, имеет следующее единственное опти-

мальное решение:  $x^* = \alpha_n \in (0,5;1]$ . Задача максимизации энтропии Шеннона на множестве неубывающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна  $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$ , удовлетворяющих частично усиленному линейному отношению порядка, имеет следующее единственное оптимальное решение  $x^* = \frac{1}{\alpha_n} = \beta_n \in [1;2)$ . При достаточно больших натуральных значениях  $n$  геометрическая прогрессия Фишберна задает приближительное решение задачи максимизации энтропии Шеннона на множестве невозрастающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, удовлетворяющих частично усиленному линейному отношению порядка. Для геометрических прогрессий Фишберна справедливо предельное соотношение  $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\hat{q}) = \ln 4 \approx 1,386294$ .

Итак, обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна  $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$  представляет собой геометрическую прогрессию (4.30), т.е. геометрическую прогрессию Фишберна. Согласно теореме 4.6, справедливо предельное соотношение  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0,5$ . Следовательно, при достаточно больших натуральных значениях  $n$  геометрическая прогрессия Фишберна задает приближительное решение задачи максимизации энтропии Шеннона на множестве невозрастающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, удовлетворяющих частично усиленному линейному отношению порядка.

Этот вывод подтверждает сравнительный анализ (таблица 4.7) значений энтропии Шеннона для соответствующих геометрических прогрессий Фишберна для нескольких первых значений  $n$ .

Таблица 4.7

**Сравнительный анализ значений энтропии Шеннона для геометрических прогрессий Фишберна**

$n$	$x^* = \alpha_n$	$h(\alpha_n)$	$H(\hat{q})$	$\delta$ (%)
2	1	0,693147	0,636514	8,1704
3	0,618034	1,025656	0,955700	6,8206
4	0,543689	1,185837	1,136917	4,1254
5	0,518790	1,272527	1,242748	2,3401

Здесь  $x^* = \alpha_n$  — это оптимальное решение задачи максимизации энтропии Шеннона на множестве невозрастающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна,  $h(\alpha_n)$  — экстремальное



значение целевой функции этой задачи,  $\hat{q}$  — соответствующая геометрическая прогрессия Фишберна,  $H(\hat{q})$  — значение энтропии Шеннона для соответствующей геометрической прогрессии Фишберна,  $\delta$  (%) — относительное отклонение (в процентном выражении) значения  $H(\hat{q})$  от числа  $h(\alpha_n)$ , все вычисления выполнены с точностью до 0,000001, а в последнем столбце — с точностью до 0,0001.

Как видно из таблицы 4.8, значения элементов последовательностей  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$  быстро приближаются к своим предельным значениям.

Таблица 4.8

**Значения элементов последовательностей  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$  для  $n = \overline{1, 5}$**

$n$	$\alpha_n$	$\beta_n$
1	1	1
2	1	1
3	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618034$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618034$
4	$\frac{\sqrt[3]{17+3\cdot\sqrt{33}} + \sqrt[3]{17-3\cdot\sqrt{33}} - 1}{3} \approx 0,543689$	$\frac{3}{\sqrt[3]{17+3\cdot\sqrt{33}} + \sqrt[3]{17-3\cdot\sqrt{33}} - 1} \approx 1,839287$
5	0,518790	1,927562

**4.10.4.** Рассмотрим метод построения произвольной последовательности, удовлетворяющей простому линейному отношению порядка и задающей распределение вероятностей (см., например, [70, с. 132]). Пусть  $\{a_j\}_{j=1}^n$  — произвольная монотонная последовательность неотрицательных чисел, сумма которых является положительным числом, т.е. справедливы соотношения  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_j \geq \dots \geq a_n \geq 0$  или  $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_j \leq \dots \leq a_n$ , при этом  $\sum_{j=1}^n a_j > 0$ , тогда последовательность  $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$ , где

$$\hat{q}_j = \frac{a_j}{\sum_{i=1}^n a_i}, j = \overline{1, n}, \quad (4.42)$$

удовлетворяет и простому линейному отношению порядка, и всем требованиям (4.36) и (4.37), т.е. задает распределение вероятностей. Далее будем использовать следующую терминологию и обозначения.

**Определение.** *Последовательностью Фишберна* будем называть последовательность  $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$ , значения элементов которой вычисляются по формулам (4.42), где  $\{a_j\}_{j=1}^n$  — монотонная последовательность неотрицательных чисел, сумма которых является положительным числом, при этом последовательность  $\{a_j\}_{j=1}^n$  будем называть *последовательностью, производящей* (или *порождающей*) *последовательностью Фишберна*  $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$ .

На первый взгляд, формула (4.42) полностью совпадает с формулой (4.32), т.е. с третьей формулой Фишберна. На самом деле, введенное понятие последовательностей Фишберна определяет класс последовательностей, являющийся гораздо более широким, чем класс последовательностей, элементы которых вычисляются по формуле точечных оценок Фишберна для случая усиленного линейного отношения порядка, т.е. при помощи третьей формулы Фишберна. Во-первых, значения элементов соответствующей последовательности  $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$ , вычисленные согласно третьей формуле Фишберна, обязаны удовлетворять усиленному линейному отношению порядка, а произвольная последовательность Фишберна может удовлетворять усиленному линейному отношению порядка, а может ему и не удовлетворять. Во-вторых, третья формула Фишберна применяется совместно с дополнительными предположениями о справедливости равенств, в которых участвуют элементы соответствующей последовательности  $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$  и параметр  $\lambda$ , а элементы произвольной последовательности Фишберна не обязаны удовлетворять этим равенствам. В-третьих, элементы любой последовательности  $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$ , вычисленные по первой (4.29), второй (4.30), третьей (4.32), четвертой (4.33) формуле Фишберна, — это частные случаи последовательностей Фишберна. В-четвертых, класс последовательностей Фишберна содержит последовательности, не являющиеся ни прогрессиями Фишберна, ни последовательностями, элементы которых удовлетворяют усиленному линейному отношению порядка. В-пятых, применение последовательностей Фишберна существенно шире вычисления точечных оценок

априорных вероятностей состояний экономической среды. Например, последовательности Фишберна можно применять для оценки вектора весовых коэффициентов приоритета (см., например, [69, с. 155–157]).

Очевидно, свойства, которыми обладает последовательность Фишберна, и свойства, которыми обладает последовательность, ее производящая, совпадают. В частности, последовательность Фишберна и последовательность, ее производящая, одновременно обладают одноименным свойством монотонности. Например, последовательность Фишберна является неубывающей (строго возрастающей) последовательностью тогда и только тогда, когда последовательность, ее производящая, является неубывающей (или строго возрастающей соответственно) последовательностью. Аналогичное утверждение справедливо про невозрастание (или строгое убывание) последовательности Фишберна. Последовательность Фишберна и последовательность, ее производящая, одновременно могут представлять собой прогрессию (арифметическую или геометрическую соответственно). Кроме того, любая последовательность Фишберна и любая последовательность, производящая последовательность Фишберна, всегда удовлетворяют простому линейному отношению порядка. Наконец, последовательность Фишберна удовлетворяет частично усиленному линейному отношению порядка тогда и только тогда, когда последовательность, ее производящая, удовлетворяет частично усиленному линейному отношению порядка.

Единственным принципиальным отличием последовательности Фишберна и последовательности, ее производящей, является то, что любая последовательность Фишберна обязана задавать распределение вероятностей и, в частности, обязана удовлетворять условию нормировки (4.36), а произвольная последовательность, производящая последовательность Фишберна, не обязана удовлетворять условию нормировки (4.37). Собственно говоря, последовательность Фишберна — это монотонная последовательность неотрицательных чисел, сумма которых равна числу 1, а последовательность, производящая последовательность Фишберна, — это монотонная последовательность неотрицательных чисел, сумма которых является положительным числом (иначе говоря, монотонная последовательность неотрицательных чисел, хотя бы одно из которых является положительным числом). Таким образом, именно последовательности Фишберна можно использовать в качестве оценок распределения вероятностей состояний экономической среды (фондового рынка), при этом в качестве последовательности,

производящей последовательность Фишберна с желаемыми свойствами, ЛПР (инвестору) следует выбирать последовательность, обладающую этими желаемыми свойствами. В качестве таких последовательностей, производящих последовательности Фишберна с желаемыми свойствами, можно выбирать прогрессии и другие известные последовательности, в частности классические последовательности натуральных чисел.

В таблице 4.9 приведены примеры (для  $n = 4$ ) последовательностей Фишберна, порожденных производящими последовательностями, элементы которых являются: **1)** константой (равной, например, 1); **2)** последовательными первыми натуральными числами; **3)** числами Фибоначчи (см., например, [65, с. 12]); **4)** обобщенной геометрической прогрессией Фишберна, максимизирующей значение энтропии Шеннона; **5)** числами Мерсенна (см., например, [65, с. 32–33]); **6)** числами Евклида (см., например, [65, с. 32]); **7)** числами Ферма (см., например, [65, с. 33]). В таблице 4.9 последовательности упорядочены по убыванию значений энтропии.

Таблица 4.9

**Примеры (для  $n = 4$ ) последовательностей Фишберна**

№ П/П	Производящая последовательность $\{a_j\}_{j=1}^4$	Последовательность Фишберна $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^4$ , най- денная по формуле (4.42)	$H(\hat{q})$
<b>1</b>	{1; 1; 1; 1}	{0,25; 0,25; 0,25; 0,25}	$\ln 4 \approx 1,3863$
<b>2</b>	{1; 2; 3; 4}	{0,1; 0,2; 0,3; 0,4}	1,2799
<b>3</b>	{1; 1; 2; 3}	$\left\{ \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7} \right\}$	1,2770
<b>4</b>	{0,0804;...; 0,5}	{0,0804; 0,1478; 0,2718; 0,5}	1,1858
<b>5</b>	{1; 3; 7; 15}	$\left\{ \frac{1}{26}, \frac{3}{26}, \frac{7}{26}, \frac{15}{26} \right\}$	1,0451
<b>6</b>	{2; 3; 7; 43}	$\left\{ \frac{2}{55}, \frac{3}{55}, \frac{7}{55}, \frac{43}{55} \right\}$	0,7340
<b>7</b>	{3; 5; 17; 257}	$\left\{ \frac{3}{282}, \frac{5}{282}, \frac{17}{282}, \frac{257}{282} \right\}$	0,3738

Легко заметить, что все последовательности Фишберна, приведенные в таблице 4.9, удовлетворяют простому линейному отношению порядка, в то время как частично усиленному линейному

отношению порядка удовлетворяют только четыре последние последовательности. Заметим также, что обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна, максимизирующая значение энтропии Шеннона, характеризуется значением  $H(\hat{q}) \approx 1,1858$ , что несколько меньше значения 1,2770 энтропии Шеннона для соответствующей последовательности Фишберна, производящая последовательность которой — числа Фибоначчи, и больше значения 1,0451 энтропии Шеннона для соответствующей последовательности Фишберна, производящая последовательность которой — числа Мерсенна.

Полезно учитывать, что в случае использования чисел Фибоначчи в качестве последовательностей, производящих последовательности Фишберна с желаемыми свойствами, в знаменателе формулы (4.42) удобно применить равенство  $\sum_{j=1}^n F_j = F_{n+2}^{-1}$ .

Следует учитывать, что монотонная последовательность неотрицательных чисел, сумма которых является положительным числом, однозначно определяет соответствующую последовательность Фишберна, но для любой последовательности Фишберна последовательность, ее порождающая, определена неоднозначно. Справедливо следующее утверждение (см., например, [70, с. 137–138]).

**Теорема 4.9.** Для любой последовательности Фишберна  $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$  существует единственная с точностью до постоянного положительного множителя последовательность  $\{a_j\}_{j=1}^n$ , производящая исходную последовательность Фишберна  $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$ , т.е. монотонная последовательность  $\{a_j\}_{j=1}^n$  неотрицательных чисел, сумма которых является положительным числом, и с использованием которой по формуле (4.42) можно построить исходную последовательность Фишберна  $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$ .

**4.10.5.** Существенность влияния, которое может оказывать выбор конкретной последовательности Фишберна в качестве оценки неизвестного распределения вероятностей состояний экономической среды на принимаемое управленческое решение, проиллюстрируем следующей модельной ситуацией принятия решения о формировании эффективного портфеля, которая была кратко рассмотрена в статье [64].

Имеются результаты наблюдений норм прибылей активов  $k = 2$  видов за  $n = 4$  периода:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{2 \times 4} = (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 27,56 & -4,29 & 13,81 & 22,95 \\ 16,88 & 45,56 & 13,74 & 18,79 \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

Построить на критериальной плоскости  $\sigma$  0  $m$  геометрические места точек, соответствующие допустимым и эффективным портфелям, для случаев, когда в качестве оценки распределения вероятностей состояний экономической среды (фондового рынка) используются последовательности Фишберна, приведенные в таблице 4.9.

Очевидно, вид множества всех портфелей, допустимых в модели Марковица, а также вид множества всех эффективных портфелей, допустимых в этой модели, зависят от используемой оценки распределения вероятностей состояний экономической среды. Для выявления существенности этой зависимости рассмотрим семь последовательностей Фишберна, приведенных в таблице 4.9. Напомним, в первом случае будет рассмотрен равномерный закон распределения вероятностей, характеризующийся равными значениями вероятностей реализаций состояний экономической среды за все периоды. Далее будут рассмотрены законы распределения вероятностей, для которых большие значения вероятностей имеют более поздние периоды; причем в первых пяти случаях это различие окажется не столь заметным, а в последних двух случаях приоритет последнего периода окажется резко выраженным.

Применяя различные последовательности Фишберна, будем изображать на критериальной плоскости линии, соответствующие портфелям, допустимым в модели Марковица.

Итак, для первой последовательности Фишберна из таблицы 4.9 имеем статистические данные, приведенные в следующей таблице.

Таблица 4.10

**Наблюдавшиеся значения норм прибыли активов и оценка распределения последовательностью Фишберна, производящая последовательность которой — константа**

Показатели \ Периоды	Периоды			
	1	2	3	4
$r_{1j}$	27,56	4,29	13,81	22,95
$r_{2j}$	16,88	45,56	13,74	18,79
$\hat{q}_j$	0,25	0,25	0,25	0,25

Среднеквадратичные отклонения (СКО) соответствующих СВ, характеризующих нормы прибыли рассматриваемых активов, ожи-

даемые нормы прибыли этих активов, ковариация между соответствующими СВ, характеризующими нормы прибыли рассматриваемых активов, и соответствующий коэффициент парной корреляции в этом случае равны  $\sigma_1 \approx 12,19\%$ ,  $\sigma_2 \approx 12,72\%$ ,  $m_1 \approx 15,01\%$ ,  $m_2 \approx 23,74\%$ ,  $c_{12} \approx -133,6305$  и  $\rho_{12} \approx -0,8614$ . Эти значения числовых характеристик позволяют найти следующую структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем экономического риска:  $\mathbf{x}^* = (x^*; 1 - x^*) \approx (0,5115; 0,4885)$ . СКО этого портфеля равно  $\sigma_{\mathbf{x}}^* \approx 3,28\%$ , а его ожидаемая норма прибыли составляет  $m_{\mathbf{x}}^* \approx 19,27\%$ , при этом множество всех эффективных портфелей представляет собой следующее множество:

$$X_1^{\text{эфф.}} = \left\{ \mathbf{x} = (x; 1-x) \mid 0 \leq x \leq x^* \approx 0,5115 \right\}.$$

На критериальной плоскости  $\sigma$  0  $m$  каждый раз будем отмечать три точки: точки  $A$  ( $\sigma_1; m_1$ ),  $B$  ( $\sigma_2; m_2$ ), соответствующие однородным портфелям  $\mathbf{e}_1 = (1; 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0; 1)$ , а также точку  $C$  ( $\sigma^*; m^*$ ), соответствующую портфелю  $\mathbf{x}^* = (x^*; 1 - x^*)$ , обладающему наименьшим уровнем ЭР. Заметим, что для всех семи случаев структура портфеля  $(x^*; 1 - x^*)$ , обладающего наименьшим уровнем ЭР, может быть найдена как решение КАИ ГС =  $\langle \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{C} \rangle$ , заданной ковариационной матрицей

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_2 \times_2 = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & c_{12} \\ c_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

которая каждый раз удовлетворяет всем требованиям теоремы 4.1.

Решим КАИ ГС =  $\langle \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{C} \rangle$ , заданной ковариационной матрицей

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_{2 \times 2} = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & c_{12} \\ c_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 148,6190 & -133,6305 \\ -133,6305 & 161,9186 \end{pmatrix}.$$

Убедимся, что для полученной ковариационной матрицы справедливы все требования теоремы 4.1. Главные миноры этой матрицы удовлетворяют соотношениям  $\Delta_{11} = c_{11} \approx 148,6190 > 0$ ,  $\Delta = \det(\mathbf{C}) = c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21} \approx 148,6190 \cdot 161,9186 - (-133,6305) \times (-133,6305) \approx 6207,0699 > 0$ , поэтому согласно критерию Сильвестра, рассматриваемая ковариационная матрица СВ, характеризующих нормы прибылей активов и заданных таблицей 4.10, явля-

ется положительно определенной. В КАИ  $\Gamma C = \langle I, I, C \rangle$  существует вполне смешанная ситуация равновесия  $(\mathbf{p}^*; \mathbf{q}^*)$ , для которой

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{q}^* = \mathbf{p}^* = \frac{\mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{C}^{-1}}{\mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{J}_2^T},$$

где

$$\begin{aligned} x_1^* = q_1^* = p_1^* &= \frac{c_{22} - c_{21}}{c_{11} - c_{12} - c_{21} + c_{22}} \approx \\ &\approx \frac{161,9186 - (-133,6305)}{148,6190 - (-133,6305) - (-133,6305) + 161,9186} = \frac{295,5491}{577,7986} \approx \\ &\approx 0,5115 > 0, \end{aligned}$$

$$x_2^* = q_2^* = p_2^* = 1 - x_1^* \approx 1 - 0,5115 = 0,4885 > 0,$$

при этом цена этой игры равна

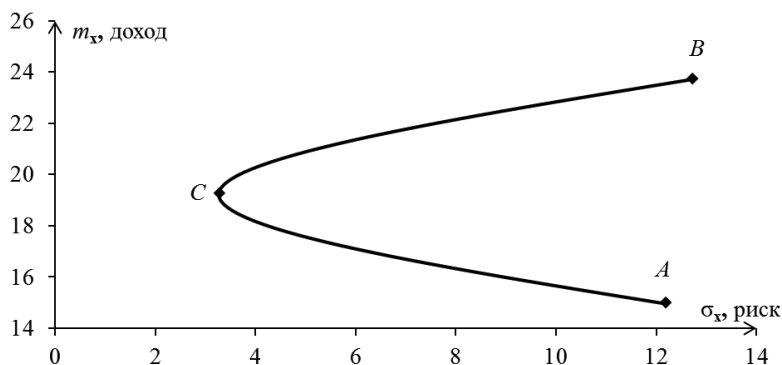
$$\sigma_{\mathbf{x}}^{*2} = V_{\mathbf{C}}^* = \frac{1}{\mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{J}_2^T} = \frac{\Delta}{c_{11} - c_{12} - c_{21} + c_{22}} \approx \frac{6207,0699}{577,7986} \approx 10,7426.$$

Итак, для КАИ  $\Gamma C = \langle I, I, C \rangle$  выполняются все требования теоремы 4.1, следовательно, эта игра является вполне смешанной игрой, оптимальные стратегии  $\mathbf{p}^*$ ,  $\mathbf{q}^*$  в КАИ  $\Gamma C$  являются единственными и совпадают, при этом совпавшие оптимальные стратегии задают структуру эффективного портфеля, обладающего наименьшим уровнем ЭР:  $\mathbf{x}^* = \mathbf{q}^* = \mathbf{p}^* \approx (0,5115; 0,4885)$ , при этом число  $\min_{\mathbf{x}} \sigma_{\mathbf{x}}^2 = \sigma_{\mathbf{x}}^{*2} = \mathbf{x}^* \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}^{*T} = V_{\mathbf{C}}^* \approx 10,7426$  является минимальным значением дисперсии на множестве всех портфелей, допустимых в модели Марковица, откуда  $\sigma_{\mathbf{x}}^* \approx \sqrt{10,7426} \approx 3,28\%$  и  $m_{\mathbf{x}}^* \approx m_1^* \cdot x_1^* + m_2^* \cdot x_2^* \approx 15,01 \cdot 0,5115 + 23,74 \cdot 0,4885 \approx 19,27\%$ .

Таким образом, в этом случае  $\mathbf{x}^* = (x^*; 1 - x^*) \approx (0,5115; 0,4885)$  – структура портфеля, обладающего наименьшим уровнем ЭР, а указанные точки имеют следующие координаты:  $A (\sigma_1; m_1) \approx (12,19; 15,01)$ ,  $B (\sigma_2; m_2) \approx (12,72; 23,74)$ ,  $C (\sigma^*; m^*) \approx (3,28; 19,27)$  (см. рис. 4.2).

Для второй последовательности Фишберна из таблицы 4.9 имеем соответствующие статистические данные, приведенные в следующей таблице (табл. 4.11).





**Рис. 4.2.** Допустимые (гипербола  $A C B$ ) и эффективные (дуга  $C B$  этой гиперболы) портфели для оценки распределения вероятностей последовательностью Фишберна, производящая последовательность которой — константа

Таблица 4.11

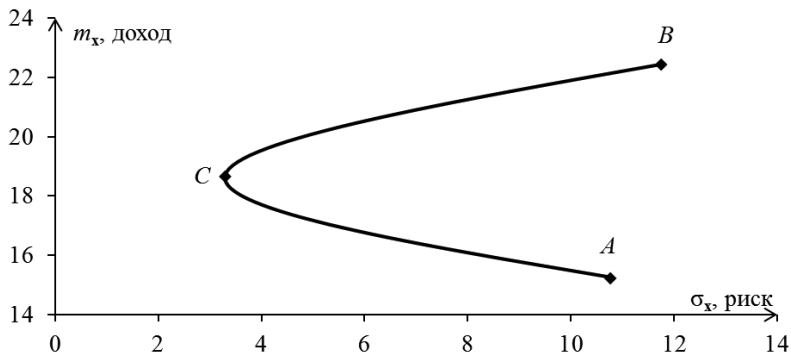
**Наблюдавшиеся значения норм прибылей активов и оценка распределения последовательностью Фишберна, производящая последовательность которой — первые натуральные числа**

Показатели \ Периоды	1	2	3	4
$r_{1j}$	27,56	4,29	13,81	22,95
$r_{2j}$	16,88	45,56	13,74	18,79
$\hat{q}_j$	0,1	0,2	0,3	0,4

СКО соответствующих СВ, характеризующих нормы прибыли рассматриваемых активов, ожидаемые нормы прибыли этих активов, ковариация между соответствующими СВ и коэффициент парной корреляции в этом случае равны  $\sigma_1 \approx 10,76\%$ ,  $\sigma_2 \approx 11,75\%$ ,  $m_1 \approx 15,22\%$ ,  $m_2 \approx 22,44\%$ ,  $c_{12} \approx -104,6810$  и  $\rho_{12} \approx -0,8278$ . Эти значения числовых характеристик позволяют найти следующую структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем экономического риска:  $\mathbf{x}^* = (x^*; 1 - x^*) \approx (0,5239; 0,4761)$ . СКО этого портфеля равно  $\sigma_{\mathbf{x}}^* \approx 3,30\%$ , а его ожидаемая норма прибыли составляет  $m_{\mathbf{x}}^* \approx 18,66\%$ , при этом множество всех эффективных портфелей представляет собой следующее множество:

$$X_2^{\text{эфф.}} = \left\{ \mathbf{x} = (x; 1 - x) \mid 0 \leq x \leq x^* \approx 0,5239 \right\}.$$

Следовательно, указанные точки имеют на плоскости  $\sigma$  0  $m$  следующие координаты:  $A (\sigma_1; m_1) \approx (10,76; 15,22)$ ,  $B (\sigma_2; m_2) \approx (11,75; 22,44)$ ,  $C (\sigma^*; m^*) \approx (3,30; 18,66)$ . Таким образом, для этого случая получаем следующий чертеж (см. рис. 4.3).



**Рис. 4.3.** Допустимые (гипербола  $A C B$ ) и эффективные (дуга  $C B$  этой гиперболы) портфели для оценки распределения вероятностей последовательностью Фишберна, производящая последовательность которой — первые натуральные числа

Для третьей последовательности Фишберна из таблицы 4.9 имеем соответствующие статистические данные, приведенные в следующей таблице.

Таблица 4.12

**Наблюдавшиеся значения норм прибылей активов и оценка распределения последовательностью Фишберна, производящая последовательность которой — первые числа Фибоначчи**

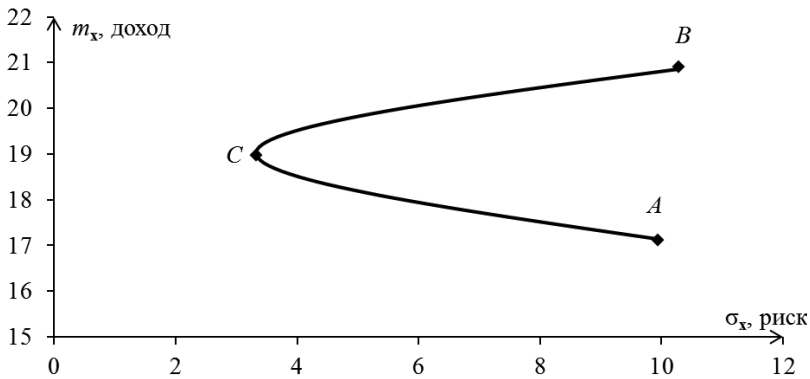
Показатели \ Периоды	Периоды			
	1	2	3	4
$r_{1j}$	27,56	4,29	13,81	22,95
$r_{2j}$	16,88	45,56	13,74	18,79
$\hat{q}_j$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$

СКО соответствующих СВ, характеризующих нормы прибыли рассматриваемых активов, ожидаемые нормы прибыли этих активов, ковариация между соответствующими СВ и коэффициент парной корреляции в этом случае равны  $\sigma_1 \approx 9,84\%$ ,  $\sigma_2 \approx 10,28\%$ ,

$m_1 \approx 17,11\%$ ,  $m_2 \approx 20,90\%$ ,  $c_{12} \approx -79,9206$  и  $\rho_{12} \approx -0,7821$ . Эти значения числовых характеристик позволяют найти следующую структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем экономического риска:  $\mathbf{x}^* = (x^*; 1 - x^*) \approx (0,5096; 0,4904)$ . СКО этого портфеля равно  $\sigma_{\mathbf{x}}^* \approx 3,34\%$ , а его ожидаемая норма прибыли составляет  $m_{\mathbf{x}}^* \approx 18,97\%$ , при этом множество всех эффективных портфелей представляет собой следующее множество:

$$X_3^{\text{эфф.}} = \left\{ \mathbf{x} = (x; 1 - x) \mid 0 \leq x \leq x^* \approx 0,5096 \right\}.$$

Следовательно, указанные три точки имеют на плоскости  $\sigma$   $m$  следующие координаты:  $A(\sigma_1; m_1) \approx (9,94; 17,11)$ ,  $B(\sigma_2; m_2) \approx (10,28; 20,90)$ ,  $C(\sigma^*; m^*) \approx (3,34; 18,97)$ . Таким образом, для этого случая получаем следующий чертеж (см. рис. 4.4).



**Рис. 4.4.** Допустимые (гипербола  $A C B$ ) и эффективные (дуга  $C B$  этой гиперболы) портфели для оценки распределения последовательностью Фишберна, производящая последовательность которой — первые числа Фибоначчи

Для четвертой последовательности Фишберна из таблицы 4.9 имеем соответствующие статистические данные, приведенные в следующей таблице (табл. 4.13).

СКО соответствующих СВ, характеризующих нормы прибыли рассматриваемых активов, ожидаемые нормы прибыли этих активов, ковариация между соответствующими СВ и коэффициент парной корреляции в этом случае равны  $\sigma_1 \approx 9,82\%$ ,  $\sigma_2 \approx 10,36\%$ ,  $m_1 \approx 16,81\%$ ,  $m_2 \approx 21,22\%$ ,  $c_{12} \approx -81,0146$  и  $\rho_{12} \approx -0,7969$ . Эти значения числовых характеристик позволяют найти следующую структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем экономи-

ческого риска:  $\mathbf{x}^* = (x^*; 1 - x^*) \approx (0,5148; 0,4852)$ . СКО этого портфеля равно  $\sigma_{\mathbf{x}}^* \approx 3,21\%$ , а его ожидаемая норма прибыли составляет  $m_{\mathbf{x}}^* \approx 18,95\%$ , при этом множество всех эффективных портфелей представляет собой следующее множество:

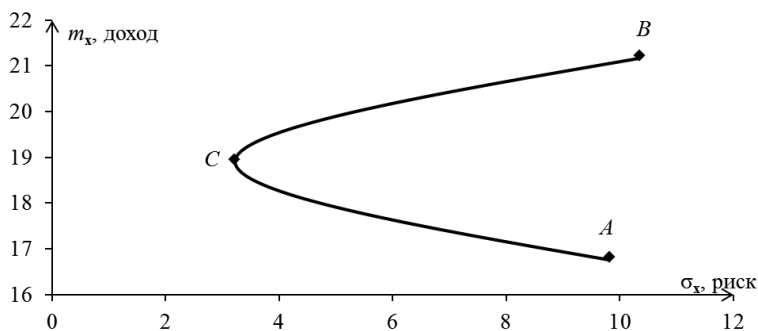
$$X_4^{\text{эфф.}} = \{ \mathbf{x} = (x; 1 - x) \mid 0 \leq x \leq x^* \approx 0,5148 \}.$$

Таблица 4.13

**Наблюдавшиеся значения норм прибылей активов и оценка распределения возрастающей обобщенной геометрической прогрессией Фишберна, максимизирующей значение энтропии Шеннона**

Показатели \ Периоды	1	2	3	4
$r_{1j}$	27,56	4,29	13,81	22,95
$r_{2j}$	16,88	45,56	13,74	18,79
$\hat{q}_j$	0,0804	0,1478	0,2718	0,5

Следовательно, указанные три точки имеют на плоскости  $\sigma$  0  $m$  следующие координаты:  $A (\sigma_1; m_1) \approx (9,82; 16,81)$ ,  $B (\sigma_2; m_2) \approx (10,36; 21,22)$ ,  $C (\sigma^*; m^*) \approx (3,21; 18,95)$ . Таким образом, для этого случая получаем следующий чертеж (см. рис. 4.5).



**Рис. 4.5.** Допустимые (гипербола  $A C B$ ) и эффективные (дуга  $C B$  этой гиперболы) портфели для оценки распределения возрастающей обобщенной геометрической прогрессией Фишберна, максимизирующей значение энтропии Шеннона

Для пятой последовательности Фишберна из таблицы 4.9 имеем соответствующие статистические данные, приведенные в следующей таблице.

**Наблюдавшиеся значения норм прибыли активов и оценка  
распределения последовательностью Фишберна, производящая  
последовательность которой — первые числа Мерсенна**

Показатели \ Периоды	1	2	3	4
$r_{1j}$	27,56	4,29	13,81	22,95
$r_{2j}$	16,88	45,56	13,74	18,79
$\hat{q}_j$	$\frac{1}{26}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{7}{26}$	$\frac{15}{26}$

СКО соответствующих СВ, характеризующих нормы прибыли рассматриваемых активов, ожидаемые нормы прибыли этих активов, ковариация между соответствующими СВ и коэффициент парной корреляции в этом случае равны  $\sigma_1 \approx 8,92\%$ ,  $\sigma_2 \approx 9,32\%$ ,  $m_1 \approx 17,52\%$ ,  $m_2 \approx 20,45\%$ ,  $c_{12} \approx -63,0668$  и  $\rho_{12} \approx -0,7586$ . Эти значения числовых характеристик позволяют найти следующую структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем экономического риска:  $\mathbf{x}^* = (x^*; 1 - x^*) \approx (0,5128; 0,4872)$ . СКО этого портфеля равно  $\sigma_{\mathbf{x}^*} \approx 3,17\%$ , а его ожидаемая норма прибыли составляет  $m_{\mathbf{x}^*} \approx 18,95\%$ , при этом множество всех эффективных портфелей представляет собой следующее множество:

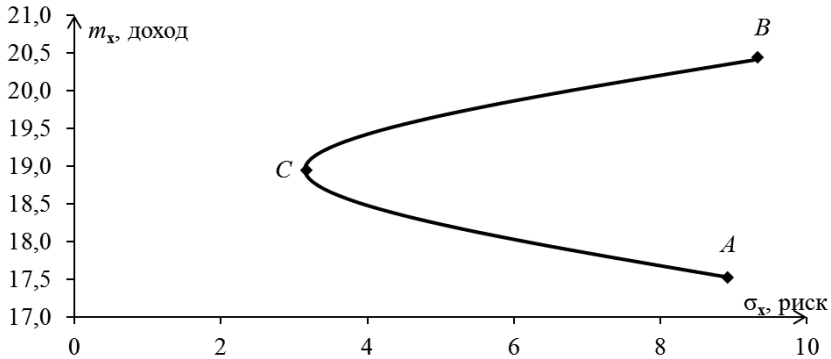
$$X_5^{\text{эфф.}} = \left\{ \mathbf{x} = (x; 1 - x) \mid 0 \leq x \leq x^* \approx 0,5128 \right\}.$$

Следовательно, указанные три точки имеют на плоскости  $\sigma$  0  $m$  следующие координаты:  $A (\sigma_1; m_1) \approx (8,92; 17,52)$ ,  $B (\sigma_2; m_2) \approx (9,32; 20,45)$ ,  $C (\sigma^*; m^*) \approx (3,17; 18,95)$ . Таким образом, для этого случая получаем следующий чертеж (см. рис. 4.6).

Для шестой последовательности Фишберна из таблицы 4.9 имеем соответствующие статистические данные, приведенные в следующей таблице (табл. 4.15).

СКО соответствующих СВ, характеризующих нормы прибыли рассматриваемых активов, ожидаемые нормы прибыли этих активов, ковариация между соответствующими СВ и коэффициент парной корреляции в этом случае равны  $\sigma_1 \approx 6,76\%$ ,  $\sigma_2 \approx 6,47\%$ ,  $m_1 \approx 20,47\%$ ,  $m_2 \approx 19,54\%$ ,  $c_{12} \approx -32,3649$  и  $\rho_{12} \approx -0,7394$ . Эти значения числовых характеристик позволяют найти следующую структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем экономического риска:  $\mathbf{x}^* = (x^*; 1 - x^*) \approx (0,4875; 0,5125)$ . СКО этого портфеля равно  $\sigma_{\mathbf{x}^*} \approx 2,39\%$ , а его ожидаемая норма прибыли составляет

$m_x^* \approx 19,99\%$ , при этом множество всех эффективных портфелей представляет собой следующее множество:



**Рис. 4.6.** Допустимые (гипербола  $A C B$ ) и эффективные (дуга  $C B$  этой гиперболы) портфели для оценки распределения последовательностью Фишберна, производящая последовательность которой — первые числа Мерсенна

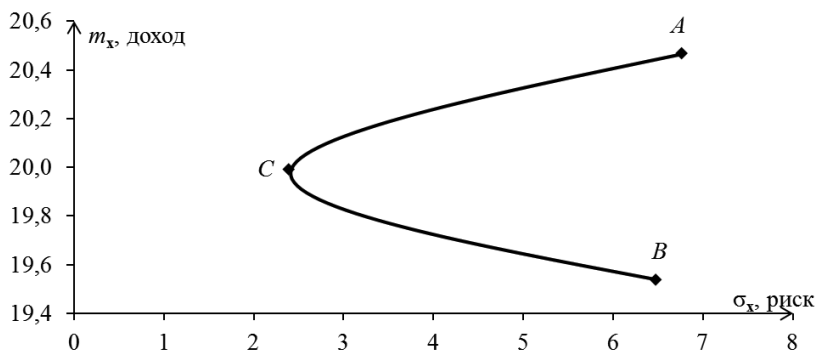
$$X_6^{\text{эфф.}} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_6) \mid x^* \approx \leq x \leq \right\}.$$

Таблица 4.15

**Наблюдавшиеся значения норм прибыли активов и оценка распределения последовательностью Фишберна, производящая последовательность которой — первые числа Евклида**

Показатели \ Периоды	Периоды			
	1	2	3	4
$r_{1j}$	27,56	4,29	13,81	22,95
$r_{2j}$	16,88	45,56	13,74	18,79
$\hat{q}_j$	$\frac{2}{55}$	$\frac{3}{55}$	$\frac{7}{55}$	$\frac{43}{55}$

Следовательно, указанные три точки имеют на плоскости  $\sigma \ 0 \ m$  следующие координаты:  $A (\sigma_1; m_1) \approx (6,76; 20,47)$ ,  $B (\sigma_2; m_2) \approx (6,47; 19,54)$ ,  $C (\sigma^*; m^*) \approx (2,39; 19,99)$ . Таким образом, для этого случая получаем следующий чертеж (см. рис. 4.7).



**Рис. 4.7.** Допустимые (гипербола  $B C A$ ) и эффективные (дуга  $C A$  этой гиперболы) портфели для оценки распределения последовательностью Фишберна, производящая последовательность которой — первые числа Евклида

Для седьмой последовательности Фишберна из таблицы 4.9 имеем соответствующие статистические данные, приведенные в следующей таблице.

Таблица 4.16

**Наблюдавшиеся значения норм прибылей активов и оценка распределения последовательностью Фишберна, производящая последовательность которой — первые числа Ферма**

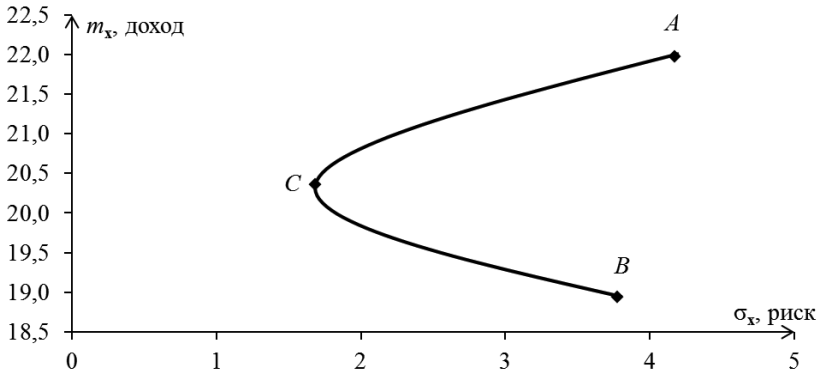
Показатели \ Периоды	1	2	3	4
$r_{1j}$	27,56	4,29	13,81	22,95
$r_{2j}$	16,88	45,56	13,74	18,79
$\hat{q}_j$	$\frac{3}{282}$	$\frac{5}{282}$	$\frac{17}{282}$	$\frac{257}{282}$

СКО соответствующих СВ, характеризующих нормы прибыли рассматриваемых активов, ожидаемые нормы прибыли этих активов, ковариация между соответствующими СВ и коэффициент парной корреляции в этом случае равны  $\sigma_1 \approx 4,18\%$ ,  $\sigma_2 \approx 3,78\%$ ,  $m_1 \approx 21,97\%$ ,  $m_2 \approx 18,94\%$ ,  $c_{12} \approx -10,0927$  и  $\rho_{12} \approx -0,6398$ . Эти значения числовых характеристик позволяют найти следующую структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем экономического риска:  $\mathbf{x}^* = (x^*; 1 - x^*) \approx (0,4693; 0,5307)$ . СКО этого портфеля равно  $\sigma_{\mathbf{x}}^* \approx 1,68\%$ , а его ожидаемая норма прибыли составляет

$m_x^* \approx 20,36\%$ , при этом множество всех эффективных портфелей представляет собой следующее множество:

$$X_7^{\text{эфф.}} = \{ \mathbf{x} = (x; 1-x) \mid x^* \approx 0,4693 \leq x \leq 1 \}.$$

Следовательно, указанные три точки имеют на плоскости  $\sigma$  0  $m$  следующие координаты:  $A (\sigma_1; m_1) \approx (4,18; 21,97)$ ,  $B (\sigma_2; m_2) \approx (3,78; 18,94)$ ,  $C (\sigma^*; m^*) \approx (1,68; 20,36)$ . Таким образом, для этого случая получаем следующий чертеж (см. рис. 4.8).



**Рис. 4.8.** Допустимые (гипербола  $B C A$ ) и эффективные (дуга  $CA$  этой гиперболы) портфели для оценки распределения последовательностью Фишберна, производящая последовательность которой — первые числа Ферма

Для наглядности полученные результаты соберем все вместе в таблице 4.17 (значения доли первого актива указаны с точностью до 0,0001, а всех остальных параметров — с точностью до 0,01).

Таблица 4.17

**Результаты расчетов для портфелей из двух активов**

№ п/п		Координаты точек			$x^*$	Множество эффективных портфелей
		A	B	C		
1	$\sigma$	12,19	12,72	3,28	0,5115	$X_1^{\text{эфф.}} =$ $= \{ \mathbf{x} = (x; 1-x) \mid 0 \leq x \leq x^* \approx 0,5115 \}$
	$m$	15,01	23,74	19,27		
2	$\sigma$	10,76	11,75	3,30	0,5239	$X_2^{\text{эфф.}} =$ $= \{ \mathbf{x} = (x; 1-x) \mid 0 \leq x \leq x^* \approx 0,5239 \}$
	$m$	15,22	22,44	18,66		



№ п/п		Координаты точек			$x^*$	Множество эффективных портфелей
		A	B	C		
3	$\sigma$	9,94	10,28	3,34	0,5096	$X_3^{\text{эфф.}} =$ $= \{ \mathbf{x} = (x; 1-x) \mid 0 \leq x \leq x^* \approx 0,5096 \}$
	$m$	17,11	20,90	18,97		
4	$\sigma$	9,82	10,36	3,21	0,5148	$X_4^{\text{эфф.}} =$ $= \{ \mathbf{x} = (x; 1-x) \mid 0 \leq x \leq x^* \approx 0,5148 \}$
	$m$	16,81	21,22	18,95		
5	$\sigma$	8,92	9,32	3,17	0,5128	$X_4^{\text{эфф.}} =$ $= \{ \mathbf{x} = (x; 1-x) \mid 0 \leq x \leq x^* \approx 0,5128 \}$
	$m$	17,52	20,45	18,95		
6	$\sigma$	6,76	6,47	2,39	0,4875	$X_5^{\text{эфф.}} =$ $= \{ \mathbf{x} = (x; 1-x) \mid x^* \approx 0,4875 \leq x \leq 1 \}$
	$m$	20,47	19,54	19,99		
7	$\sigma$	4,18	3,78	1,68	0,4693	$X_6^{\text{эфф.}} =$ $= \{ \mathbf{x} = (x; 1-x) \mid x^* \approx 0,4693 \leq x \leq 1 \}$
	$m$	21,97	18,94	20,36		

Очевидно, включения множеств  $X_i^{\text{эфф.}} \subset X, i = \overline{1,7}$  справедливы для всех рассмотренных случаев (разумеется, такие включения справедливы всегда), но найденные в последних двух случаях, когда как производящая последовательность использовались последовательности чисел Евклида и Ферма соответственно, множества всех эффективных портфелей кардинально отличаются (по своей структуре) от множеств всех эффективных портфелей, найденных в первых пяти случаях. В первых пяти случаях найденные множества всех эффективных портфелей имеют общий вид:  $X^{\text{эфф.}} = \{ \mathbf{x} = (x; 1-x) \mid 0 \leq x \leq x^* \}$ , где  $x^* > 0,5$ , а в последних двух случаях найденные множества всех эффективных портфелей имеют совершенно другой общий вид:  $X^{\text{эфф.}} = \{ \mathbf{x} = (x; 1-x) \mid x^* \leq x \leq 1 \}$ , где  $x^* < 0,5$ .

Итак, в случае, когда ситуацию принятия управленческих решений, например принятия портфельных решений, характеризует статистическая игра, требуется корректно оценить распределение вероятностей состояний экономической среды. Для корректной оценки распределения вероятностей состояний экономической среды целесообразно применение последовательностей Фишберна.

Выбрав в качестве последовательности, производящей последовательность Фишберна, последовательность, обладающую желеае-

мыми свойствами (например, можно использовать возрастающие геометрические прогрессии, знаменатель которых является достаточно большим числом, а также такие последовательности, как числа Мерсенна, числа Евклида, числа Ферма), ЛПР может применить в качестве оценки распределения вероятностей состояний экономической среды последовательность Фишберна, порожденную выбранной им последовательностью. Заметим, что к случаям, когда целесообразно применять последовательности Фишберна, удовлетворяющие частично усиленному линейному отношению порядка, можно отнести ситуации, когда в качестве статистических данных используются динамические ряды, а сами динамические изменения характеризуются быстрыми темпами. К таким случаям можно отнести, например, кризисные и предкризисные ситуации, ситуации резкого роста национальной экономики или соответствующего сектора экономики.

Относительно последовательностей, производящих последовательности Фишберна, хотелось бы подчеркнуть, что возможные варианты не исчерпываются упомянутыми выше последовательностями: прогрессиями и классическими последовательностями натуральных чисел, такими, например, как числа Фибоначчи, числа Мерсенна, числа Евклида, числа Ферма. В качестве последовательностей, производящих последовательности Фишберна, можно также использовать другие последовательности, например гармонические числа. Кроме того, выбрав в качестве последовательности, производящей последовательность Фишберна, конкретную последовательность, обладающую желаемыми свойствами, ЛПР может использовать эту последовательность не с первых ее элементов и/или не подряд идущие ее элементы.

Построенная согласно вышеприведенной схеме оценка распределения вероятностей состояний экономической среды представляет собой последовательность Фишберна, обладающую желаемыми свойствами (в частности, подчиняющуюся соответствующему линейному отношению порядка) и соответствующую мнению, представлениям и предпочтениям ЛПР. По схеме, аналогичной вышеприведенной схеме построения оценки распределения вероятностей экономической среды, можно находить, например, оценку вектора весовых коэффициентов, в т.ч. для решения задач многокритериальной оптимизации, или оценку вектора значимости рассматриваемых факторов.

В случае, когда ситуацию принятия решений о формировании эффективного портфеля характеризует статистическая игра, следует учитывать, что используемая оценка распределения вероят-

ностей состояний экономической среды (фондового рынка) может существенно влиять на значения числовых характеристик активов и портфелей, на расположение на критериальной плоскости точек, соответствующих однородным портфелям, а также на вид множеств допустимых и эффективных портфелей и вид геометрических мест точек критериальной плоскости, соответствующих этим двум множествам.

ЛПР должно осуществлять свой выбор оценки распределения вероятностей состояний экономической среды (или оценки вектора весовых коэффициентов) на основе имеющейся в его распоряжении информации, его опыта, компетентности и профессиональной интуиции. Окончательный выбор оценки распределения вероятностей состояний экономической среды (или оценки вектора весовых коэффициентов), которую следует использовать для принятия управленческих решений, зависит прежде всего от мнения ЛПР о том, какой системе ограничений должны удовлетворять неизвестные значения компонент соответствующего вектора. В частности, этот выбор зависит от того, считает ли ЛПР, что неизвестные значения компонент соответствующего вектора должны удовлетворять лишь простому линейному отношению порядка, или эти значения должны удовлетворять еще и частично усиленному линейному отношению порядка. Основное преимущество предлагаемого метода построения оценки распределения вероятностей состояний экономической среды (или оценки вектора весовых коэффициентов) состоит в том, что он позволяет найти такой вектор, который дает возможность максимально учесть субъективные предпочтения ЛПР.

## Заключение

Очевидно, в монографии освещены лишь отдельные аспекты применения энтропии в экономике. Это объясняется несколькими причинами, главной из которых является то, что содержание монографии отражает применение энтропии не в экономике в целом, а лишь применение энтропии в экономико-математическом моделировании процессов принятия управленческих решений в экономике. Кроме того, выбирая конкретные проблематики применения энтропии в экономико-математическом моделировании, авторы, естественно, ориентировались в первую очередь на сферу собственных научных интересов.

Однако рассмотренные экономико-математические методы и модели позволили проиллюстрировать все богатство и разнообразие энтропийного подхода при моделировании процессов принятия управленческих решений в условиях хаотичности, случайности, неопределенности, конфликтности и обусловленного ими экономического риска. В частности, применение энтропии в экономических исследованиях следует признать целесообразным и эффективным при рассмотрении, например, таких вопросов, как анализ временных рядов, моделирование процессов на финансовых рынках, моделирование задачи поиска структуры эффективного портфеля, распределение ресурсов, анализ сложности экономических систем. В одних случаях энтропия играет роль инструментария, необходимого для выполнения соответствующего анализа, в других случаях она может выступать в роли одного из критериев принятия решений.

К сожалению, огромный пласт использования энтропийного подхода, накопленный в экономической науке и практике, оказался за рамками проведенных исследований. Среди многих материалов, связанных с применением энтропии в экономике и не относящихся к проблематике монографии, оказалась и термoeкономика. Термoeкономика (эксергоэкономика) — это наука о рациональном использовании энергетических ресурсов в контексте соединения второго начала термодинамики и экономического анализа. Считается, что методы термoeкономики представляют собой наилучший путь к решению различных, в том числе весьма сложных, проблем оптимизации.

Эксергоэкономика как самостоятельная наука была предложена в 1986 году профессором Джорджем Тсатсаронисом, директором Ин-

ститута энергетической техники Берлинского технического университета. За прошедшее время термоэкономика сама уже стала основой для возникновения новых направлений и методов: теории эксергетической стоимости; термоэкономической диагностики; итеративной эксергоэкономики; эксергобазисных экспертных систем и т.д.

Еще одним перспективным, в том числе с общенаучной и философской точек зрения, направлением применения энтропийного подхода является понятие негэнтропии, отрицательной энтропии, из синергетической теории информации. Впервые понятие отрицательной энтропии предложил в 1943 году австрийский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики, лауреат Нобелевской премии по физике 1933 года Эрвин Рудольф Йозеф Александр Шредингер (1887–1961) в своей научно-популярной книге «Что такое жизнь? Физический аспект живой клетки».

Шредингер пришел к выводу, что биологическим системам для своего существования необходимо извлекать из окружающей среды отрицательную энтропию, чтобы компенсировать внутреннее производство энтропии и тем самым тормозить свое движение в сторону термодинамического равновесия, соответствующего состоянию смерти. Позднее, в 1956 году в работе «Научная неопределенность и информация» французско-американский физик, основоположник современной физики твердого тела Леон Никола Бриллюэн (1889–1969), рассматривая деградацию качества энергии в замкнутой системе как следствие возрастания в ней энтропии, для краткости отрицательную энтропию стал называть негэнтропией, подчеркивая, что «негэнтропия представляет собой, в конечном счете, качество энергии».

По своей сути, энтропия — это хаос, беспорядок, саморазрушение и саморазложение. Соответственно, негэнтропия — это движение к упорядоченности, к организации системы. По отношению к живым системам это означает следующее: для того, чтобы не погибнуть, живая система борется с окружающим хаосом путем организации и упорядочивания последнего, т.е. импортируя негэнтропию. Именно так с точки зрения термодинамики можно объяснить поведение самоорганизующихся систем.

Известный российский экономист Сергей Леонидович Аксенов разместил на своем персональном сайте шуточные законы (начала) термоэкономики. Например, **нулевое начало термоэкономики** формулируется так: если экономическая теория **А** равноценна экономической теории **В**, а экономическая теория **В**, в свою очередь, равноценна экономической теории **С**, то экономическая теория **А** равноценна теории **С**. При этом их практические полезности равны.

**Первое начало термoeкономики** утверждает, что в любой изолированной (не подтвержденной практикой) экономической теории запас практической полезности остается постоянным и всегда равен нулю.

**Второе начало термoeкономики** утверждает невозможность естественного перехода полезности от экономической теории к реально существующей организации.

**Третье начало термoeкономики** гласит, что невозможно сделать предприятие успешным посредством конечного числа шагов, описанных в экономической теории.

В этой шутке Аксенова, как и в любой шутке, есть доля истины. В частности, сам Аксенов так комментирует свои формулировки первого и второго начал термoeкономики. Можно сказать, что первое начало термoeкономики запрещает создание экономической теории первого рода, а второе начало термoeкономики запрещает создание экономической теории второго рода. Экономическая теория первого рода — это теория, которая приносит пользу предприятию, не черпая пользы из какого-либо иного источника. Экономическая теория второго рода — это теория, которая имеет коэффициент полезного действия, равный единице, т.е. это такая теория, которая приносит вреда столько же, сколько и пользы. А, по мнению Аксенова, в реальной действительности любая экономическая теория приносит вреда предприятию гораздо больше, чем пользы.

Эти полушуточные начала термoeкономики несложно распространить и на концепцию применения энтропии в экономической теории и практике. В связи с этим еще раз подчеркнем, что энтропийный подход является довольно сложной областью науки. В случае обращения к нему, в том числе и в случае обращения к нему в экономических исследованиях, необходимо применять системный анализ, знать границы использования энтропии. Весьма упрощенные методики применения энтропийного подхода в экономике могут вызвать угрозу соответствующих ошибок. Механический перенос принципов термодинамики и теории энтропии в экономику и теорию принятия управленческих решений абсолютно недопустим.

Всегда следует учитывать, что принятие управленческих решений — это прежде всего искусство. Если лицо, принимающее решения, осуществило выбор своей оптимальной стратегии, применяя соответствующий научный инструментарий, в том числе и энтропийный подход в случае, когда его применение возможно и корректно, то абсолютное следование этой выбранной оптимальной стратегии не является обязательным. Искусство принятия управ-

ленческих решений в экономике требует от лица, принимающего решения, высокой профессиональной квалификации, компетентности и интуиции. Именно поэтому, ориентируясь на найденную свою оптимальную стратегию, лицо, принимающее решения, не обязано строго придерживаться этой оптимальной стратегии. Как правило, те или иные отклонения от выбранной оптимальной стратегии абсолютно неизбежны. Эта особенность процессов принятия управленческих решений в экономике в полной мере относится и к случаям принятия решений, основанных на применении энтропии.

Принятие управленческих решений, основанных на применении энтропии, дает возможность качественнее учесть хаотичность, случайность, сложность, противоречивость, неопределенность, неполноту информации, конфликтность, многокритериальность, альтернативность и обусловленный ими риск, а также оптимизировать уровень экономического риска. Энтропийный подход в экономических исследованиях целесообразно применять совместно с другими концепциями и теориями, что позволяет существенно улучшить качество принятого управленческого решения. На наш взгляд, хаотичность экономических процессов и явлений будет возрастать, поэтому потребность применения энтропии при моделировании процессов принятия управленческих решений в экономике ближайшее время также будет неуклонно нарастать. Это и обуславливает актуальность и перспективность научных разработок, связанных с теорией энтропии и ее применением в экономике.

## Список использованной литературы

1. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. Т. 1 [Текст]: пер. с англ. / Р. Балеску. — М.: Мир, 1978.
2. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. Т. 2 [Текст]: пер. с англ. / Р. Балеску. — М.: Мир, 1978.
3. *Бардась А.В.* Розробка оцінки інвестиційної привабливості вугільної шахти із врахуванням внутрішньої економічної ентропії [Текст]: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. екон. наук / А.В. Бардась. — Дніпропетровськ, 2004.
4. *Батир А.В.* Порівняльний аналіз рекурентних та ентропійних мір складності [Текст] / А.В. Батир, В.М. Соловійов, В.В. Щерба // Інформаційні технології та моделювання в економіці: на шляху до міждисциплінарності: монографія / за ред. д.ф.-м.н., проф. В.М. Соловійова. — Черкаси: Брама-Україна, видавець Вовчок О. Ю., 2013.
5. *Білей Н.В.* Розробка системи управління якістю на міні трикотажно-швейному підприємстві [Текст]: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. тех. наук / Н.В. Білей. — Дніпропетровськ, 2001.
6. Блекуэлл Д. Теория игр и статистических решений [Текст] / Д. Блекуэлл; пер. с англ. М.А. Гиршик. — М.: ИЛ, 1958.
7. *Бродянский В.М.* Эксергетический метод и его приложения [Текст] / В.М. Бродянский, В. Фратшер, К. Михалек. — М.: Энергоатомиздат, 1988.
8. *Булинский А.В.* Теория случайных процессов [Текст] / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
9. Вальд А. Последовательный анализ [Текст]: пер. с англ. / А. Вальд. — М.: Физматгиз, 1960.
10. *Величко Н.М.* Аналітичне забезпечення стратегічного управління інноваційною діяльністю машинобудівних підприємств [Текст]: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. екон. наук / Н.М. Величко. — Луганськ, 2010.
11. Вильсон А.Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем [Текст]: пер. с англ. / А.Дж. Вильсон. — М.: Наука, 1978.
12. *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков [Текст] / Н.Н. Воробьев. — М.: Наука, 1985.
13. *Ермоленко Г.Г.* Выявление зависимости волатильности от энтропии на FOREX [Текст] / Г.Г. Ермоленко, М.Ю. Куссый, Р.А. Морозов, С.В. Щербина // Культура народов Причерноморья. — 2006. — № 74. — Т. 2.
14. Гиббс Дж.В. Термодинамика. Статистическая механика. Избранные труды [Текст]: пер. с англ. / Дж.В. Гиббс. — М.: Наука, 1982.
15. *Гончаренко М.Л.* Економічні відносини в сфері освітніх послуг у період ринкової трансформації [Текст]: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. ек. наук / М.Л. Гончаренко. — Харків, 2004.



16. *Губко М.В.* Теория игр в управлении организационными системами [Текст] / М.В. Губко, Д.А. Новиков. — М.: СИНТЕГ, 2002.
17. *Гура В.Л.* Формування та реалізація потенціалу конкурентоспроможності підприємств молокопереробної галузі України [Текст]: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. екон. наук / В.Л. Гура. — Київ, 2011.
18. *Економічний ризик: ігрові моделі* [Текст] / за ред. д-ра екон. наук, проф. В.В. Вітлінського. — К.: КНЕУ, 2002.
19. *Ермоленко Г.Г.* Модель прогнозування динаміки ціни на FOREX з урахуванням волатильності ринку [Текст] / Г.Г. Ермоленко, М.Ю. Кусый // *Економіка Крима*. — 2006. — № 17.
20. *Зельдович Я.Б.* Стрoение и эволюция Вселенной [Текст] / Я.Б. Зельдович, И.Д. Новиков. — М.: Наука, 1975.
21. *Зоренко О.В.* Диверсифікація виробництва в аграрній сфері [Текст]: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. екон. наук / О.В. Зоренко. — Дніпропетровськ, 2006.
22. *Аптекарь М.Д.* Информационно-энтропийный подход в анализе эколого-экономических систем [Текст] / М.Д. Аптекарь, С.К. Рамазанов, В.Ю. Припотень, М.А. Руденко // *Вісник СНУ ім. В. Даля*. — 2005. — № 5 (87).
23. *Киселев В.Б.* Разработка и исследование методов и алгоритмов построения математических моделей с использованием рекуррентных диаграмм [Текст]: автореф. на соиск. науч. степ. канд. техн. наук / В.Б. Киселев. — СПб.: Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, 2009.
24. *Климонтович Ю.Л.* Введение в физику открытых систем [Текст] / Ю.Л. Климонтович. — М.: Янус-К, 2002.
25. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая теория открытых систем. Том 1 [Текст] / Ю.Л. Климонтович. — М.: Янус, 1995.
26. *Климонтович Ю.Л.* Турбулентное движение и структура хаоса. Новый подход к статистической теории открытых систем [Текст] / Ю.Л. Климонтович. — М.: Наука, 1990.
27. *Колмогоров А.Н.* Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространства Лебега [Текст] / А.Н. Колмогоров // *ДАН СССР*. — 1958. — Т. 119.
28. *Колмогоров А.Н.* Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов [Текст] / А.Н. Колмогоров // *ДАН СССР*. — 1959. — Т. 124.
29. *Колмогоров А.Н.* Теория информации и теория алгоритмов [Текст] / А.Н. Колмогоров. — М.: Наука, 1987.
30. *Королев О.Л.* Анализ экономических временных рядов на основе рекуррентного анализа [Текст] / О.Л. Королев // *Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем (АМУР — 2013): сб. научных трудов VII Междунар. школы-симпозиума АМУР — 2013 (Севастополь, 12—21 сентября 2013)*. — Симферополь: ТНУ им. В.И. Вернадского, 2013.

31. *Королев О.Л.* Исследование изменения тренда динамики цены на FOREX с помощью рекуррентного анализа [Текст] / О.Л. Королев // Культура народов Причерноморья. — 2013. — № 257.
32. *Королев О.Л.* Методы рекуррентного анализа временных рядов в экономике [Текст] / О.Л. Королев // Ученые записки ТНУ. Серия: Экономика и управление. — 2013. — Т. 26 (65).
33. *Корольов О.Л.* Методи рекуррентного аналізу часових рядів в економіці [Текст] / О.Л. Корольов // Сучасні концепції прогнозування розвитку складних соціально-економічних систем: монографія / за ред. О.І. Черняка, П.В. Захарченка. — Бердянськ: Видавець Ткачук О.В., 2013.
34. *Кусый М.Ю.* Использование показателя волатильности в моделях прогнозирования тренда [Текст] / М.Ю. Кусый // Ученые записки ТНУ. Серия: Экономика. — 2003. — Т. 16 (55). — № 1.
35. *Кусый М.Ю.* Модель использования остатков средств на текущих клиентских счетах в качестве ресурсной базы банка [Текст] / М.Ю. Кусый, П.М. Кусый, Р.А. Морозов, Г.С. Морозова // Культура народов Причерноморья. — 2007. — № 108.
36. *Кусый М.Ю.* Трехпараметрическая модель для прогнозирования динамики цены на финансовых рынках [Текст] / М.Ю. Кусый, А.В. Дудко // Ученые записки ТНУ. Серия: Экономика и управление. — 2011. — Т. 24 (63). — № 1.
37. *Лившиц В.Н.* Об энтропийном анализе переходной экономики [Текст] / В.Н. Лившиц, А.В. Сигал // Экономика и математические методы. — 2014. — Т. 50. — Вып. 3.
38. *Малинецкий Г.Г.* Математический основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент [Текст] / Г.Г. Малинецкий. — Изд. 7-е. — М.: Эдиториал УРСС, 2012.
39. *Малинецкий Г.Г.* Современные проблемы нелинейной динамики [Текст] / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. — Изд. 2-е. — М.: Эдиториал УРСС, 2002.
40. Мандельброт Б. (Не)послушные рынки. Фрактальная революция в финансах [Текст]: пер. с англ. / Б. Мандельброт, Р.Л. Хадсон. — М.: Вильямс, 2006.
41. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы [Текст]: пер. с англ. / Б. Мандельброт. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
42. *Мартин Н.* Математическая теория энтропии [Текст]: пер. с англ. / Н. Мартин, Дж. Ингленд. — М.: Мир, 1988.
43. *Мартюшев Л.М.* Принцип максимальности производства энтропии в физике и смежных областях [Текст] / Л.М. Мартюшев, В.Д. Селезнев. — Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2006.
44. *Мезенцев О.М.* Моделювання критичних та кризових явищ на валютному ринку [Текст]: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. екон. наук / О.М. Мезенцев. — Київ, 2011.

45. *Млодецький В.Р.* Організаційно-технологічна та управлінська надійність функціональної системи будівельної організації [Текст]: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора технічних наук / В.Р. Млодецький. — Дніпропетровськ, 2005.
46. *Моррис Л.Г.* Японские свечи: метод анализа акций и фьючерсов, проверенный временем [Текст]: пер. с англ. / Л.Г. Моррис. — М.: Альпина Паблишер, 2001.
47. *Мухамедов В.А.* Фрактальные размерности сейсмического шума [Текст] / В.А. Мухамедов. — М., 1989. — 25 с. — Деп. в ВИНТИ, № 6180.
48. *Недосекин А.О.* Методологические основы моделирования финансовой деятельности с использованием нечетко-множественных описаний [Текст]: автореф. ... д-ра экон. наук / А.О. Недосекин. — СПб., 2003.
49. Нейман Дж. фон. Математические основы квантовой механики [Текст]: пер. с нем. / Дж. фон Нейман. — М.: Наука, 1964.
50. *Нельсон Р.Р.* Эволюционная теория экономических изменений [Текст]: пер. с англ. / Р.Р. Нельсон, С.Дж. Уинтер. — М.: Дело, 2002.
51. *Николис Дж.* Динамика иерархических систем: Эволюционное предствление [Текст]: пер. с англ. / Дж. Николис. — М.: Мир, 1989.
52. *Панченков А.Н.* Энтропия [Текст] / А.Н. Панченков. — Нижний Новгород: Интелсервис, 1999.
53. *Панченков А.Н.* Энтропия — 2: Хаотическая механика [Текст] / А.Н. Панченков. — Нижний Новгород: Интелсервис, 2002.
54. *Прангишвили И.В.* Системные законы и закономерности в электродинамике, природе и обществе [Текст] / И.В. Прангишвили, Ф.Ф. Пашенко, Б.П. Бусыгин. — М.: Наука, 2001.
55. *Прангишвили И.В.* Энтропийные и другие системные закономерности: Вопросы управления сложными системами [Текст] / И.В. Прангишвили; Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова. — М.: Наука, 2003.
56. *Пригожин И.* Неравновесная статистическая механика [Текст]: пер. с англ. / И. Пригожин. — М.: Мир, 1964.
57. *Пригожин И.* От существующего к возникающему: Время и сложность в физических науках [Текст]: пер. с англ. / И. Пригожин. — М.: Наука, 1985.
58. *Рач Д.В.* Метод освоенного объема в задачах управления рисками в проектах [Текст] / Д.В. Рач // Управление проектами и развитие производства. — 2011. — № 4 (40).
59. *Резибуа П.* Классическая кинетическая теория жидкостей и газов [Текст]: пер. с англ. / П. Резибуа, М. Де Ленер. — М.: Мир, 1980.
60. *Ремесник Е.С.* Последовательности Фишберна и их применение в экономических исследованиях [Текст]: монография / Е.С. Ремесник, А.В. Сигал. — Симферополь: ИП Корниенко А.А., 2019.

61. *Романовский М.Ю.* Введение в эконофизику. Статистические и динамические модели [Текст] / М.Ю. Романовский, Ю.М. Романовский. — М. — Ижевск: РХД, 2007.
62. *Савіна Н.Б.* Економічна оцінка і прогнозування ефективності інвестицій [Текст]: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. ек. наук / Н.Б. Савіна. — Ужгород, 2002.
63. *Саттам Я.А.Д.* Моделювання та інформаційні засоби підтримки маркетингової діяльності підприємств [Текст]: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. екон. наук / Я.А.Д. Саттам. — Київ, 2010.
64. *Сигал А.В.* Антагонистическая игра, заданная в условиях частичной неопределенности [Текст] / А.В. Сигал, В.Ф. Блыщик // Экономическая кибернетика: Международный научный журнал. — 2005. — № 5-6 (35-36).
65. *Сигал А.В.* Конкретная математика [Текст]: учебное пособие для обучающихся по направлению подготовки 38.03.05 Бизнес-информатика / А.В. Сигал, Л.Ф. Яценко. — Издание 4-е, доп. и перераб. — Симферополь: ИП Зуева Т.В., 2017.
66. *Сигал А.В.* О приведении обобщенной модели Марковица в поле третьей информационной ситуации к классической модели Марковица [Текст] / А.В. Сигал // Системный анализ и информационные технологии: труды 7-й Международной конференции САИТ — 2017 (13—18 июня 2017, Светлогорск). — М.: ФИЦ ИУ РАН, 2017.
67. *Сигал А.В.* Об эффективности портфелей, найденных теоретико-игровым методом [Текст] / А.В. Сигал // Экономика и математические методы. — 2018. — Т. 54. — Вып. 1.
68. *Сигал А.В.* Основы современной теории портфеля ценных бумаг [Текст]: учебное пособие / А.В. Сигал. — Симферополь: КЭИ КНЭУ, 1998.
69. *Сигал А.В.* Последовательности Фишберна для принятия решений в экономике [Текст]: монография / А.В. Сигал, Е.С. Ремесник. — М.: ИНФРА-М, 2021.
70. *Сигал А.В.* Последовательности Фишберна и их применение в современной теории портфеля [Текст]: монография / А.В. Сигал, Е.С. Ремесник. — Симферополь: ИП Корниенко А.А., 2018.
71. *Сигал А.В.* Теоретико-игровая оптимизация структуры портфеля в условиях неопределенности и риска [Текст] / А.В. Сигал // Экономическая политика и фондовый рынок: модели и методы системного анализа. Труды ИСА РАН. — М.: Поли Принт Сервис, 2009. — Т. 47.
72. *Сигал А.В.* Теоретико-игровое моделирование экономического риска [Текст] / А.В. Сигал, Линь Сэнь // Математическое и информационное моделирование социально-экономических процессов и систем: монография / под ред. проф. Н.В. Апатовой, доц. А.В. Сигала. — Симферополь: ДИАИПИ, 2011.
73. *Сигал А.В.* Теория игр и ее экономические приложения [Текст]: учеб. пособие / А.В. Сигал. — М.: ИНФРА-М, 2019.

74. *Сидоренко Л.Ж.* Методы оценки финансовой устойчивости предприятий малого бизнеса и факторов, влияющих на нее, в условиях современной России [Текст]: автореф. ... канд. экон. наук / Л.Ж. Сидоренко. — Майкоп, 2011.
75. *Сігал А.В.* Застосування теорії ігор щодо теорії портфеля [Текст] / А.В. Сігал // Машинна обробка інформації: Міжвід. наук. зб. — Вип. 61. — К.: КНЕУ, 1998.
76. *Сігал А.В.* Теоретико-ігрове моделювання і управління ризиком [Текст] / А.В. Сігал // Ризики, безпека, кризи і сталий розвиток в економіці: методології, моделі, методи управління та прийняття рішень: монографія / під заг. ред. проф. С.К. Рамазанова. — Луганськ: Ноулідж, 2012.
77. *Дербенцев В.Д.* Сінергетичні та еконофізичні методи дослідження динамічних та структурних характеристик економічних систем [Текст]: монографія / В.Д. Дербенцев, О.А. Сердюк, В.М. Соловійов, О.Д. Шапаров. — Черкаси: Брама-Україна, 2010.
78. *Соловійов В.М.* Використання ентропії Тсалліса для оцінки складності економічних систем [Текст] / В.М. Соловійов, О.А. Сердюк // Інформаційні технології та моделювання в економіці: на шляху до міждисциплінарності: монографія / за ред. д.ф.-м.н., проф. В.М. Соловійова. — Черкаси: Брама-Україна, видавець Вовчок О.Ю., 2013.
79. *Соловійов В.М.* Застосування кількісного аналізу рекурентних діаграм для моделювання універсальних властивостей кризових явищ [Текст] / В.М. Соловійов, В.В. Щерба // Міжнародний наук. збірник «Моделювання та інформаційні системи в економіці». — К.: КНЕУ, 2008. — Вип. 78.
80. Странные аттракторы [Текст]: сборник статей: пер. с англ. — М.: Мир, 1981.
81. *Таха Х.А.* Введение в исследование операций [Текст]: пер. с англ. / Х.А. Таха. — 6-е издание. — М.: Вильямс, 2001.
82. *Трухаев Р.И.* Модели принятия решений в условиях неопределенности [Текст] / Р.И. Трухаев. — М.: Наука, 1981.
83. *Тсатсаронис Дж.* Взаимодействие термодинамики и экономики для минимизации стоимости энергопреобразующей системы [Текст]: монографія / Дж. Тсатсаронис; пер. с англ. Одесск. гос. акад. холода. — Одесса: Негоциант, 2002.
84. *Федер Е.* Фракталы [Текст]: пер. с англ. / Е. Федер. — М.: Мир, 1991.
85. *Федулова І.В.* Моделювання та інформаційні засоби підтримки маркетингової діяльності підприємств [Текст]: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора экон. наук / І.В. Федулова. — Київ, 2009.
86. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений [Текст]: пер. с англ. / П. Фишберн. — М.: Наука, 1978.
87. *Хакен Г.* Информация и самоорганизация: Макроскопический подход к сложным системам [Текст]: пер. с англ. / Г. Хакен. — М.: Мир, 1991.

88. *Хокинг С.В.* Черные дыры и термодинамика [Текст]: пер. с англ. / С.В. Хокинг // Черные дыры. Новости фундаментальной физики. — 1978. — Вып. 9.
89. *Чекулаев М.* Риск-менеджмент: управления финансовыми рисками на основе анализа волатильности [Текст] / М. Чекулаев. — М.: Альпина Паблишер, 2002.
90. *Чумак О.В.* Энтропии и фракталы в анализе данных [Текст] / О.В. Чумак. — М. — Ижевск: РХД, 2011.
91. *Шамбадаль П.* Развитие и приложения понятия энтропии [Текст]: пер. с франц. / П. Шамбадаль. — М.: Наука, 1967.
92. *Шаргут Я.* Эксергия [Текст]: пер. с польского / Я. Шаргут, Р. Петеда. — М.: Энергия, 1968.
93. *Шеннон К.Э.* Работы по теории информации и кибернетике [Текст]: пер. с англ. / К.Э. Шеннон. — М.: ИЛ, 1963.
94. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая [Текст]: пер. с англ. / М. Шредер. — Ижевск: РХД, 2001.
95. *Эбелинг В.* Образование структур при необратимых процессах. Введение в теорию диссипативных структур [Текст]: пер. с нем. / В. Эбелинг. — М.: Мир, 1979.
96. *Юровський Р.І.* Підвищення економічної ефективності природокористування на основі управління ресурсами вугільних шахт [Текст]: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. ек. наук / Р.І. Юровський. — Дніпропетровськ, 2001.
97. *Янковський М.А.* Управління конкурентоспроможністю підприємства на світових ринках [Текст]: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора ек. наук / М.А. Янковський. — Донецьк, 2005.
98. *Annby-Andersson B.* Maxwell's demon in a double quantum dot with continuous charge detection [Text] / B. Annby-Andersson, P. Samuelsson, V.F. Maisi, P.P. Potts // Phys. Rev. B. — 2020. — V. 101.
99. *Aumann R.J.* Repeated Game with Incomplete Information [Text] / R.J. Aumann, M. Maschler. — Cambridge: MIT Press, 1995.
100. *Avinery R.* Universal and Accessible Entropy Estimation Using a Compression Algorithm [Text] / R. Avinery, M. Kornreich, R. Beck // Phys. Rev. Lett. — 2019. — V. 123.
101. *Cercignani C.* Ludwig Boltzmann: The Man Who Trusted Atoms [Text] / C. Cercignani. — Oxford: Oxford University Press, 1998.
102. *Eckmann J.-P.* Recurrence Plots of Dynamical Systems [Text] / J.-P. Eckmann, O.S. Kamphorst, D. Ruelle // Europhys. Lett. — 1987. — V. 4. — No. 9.
103. *Packard N.H.* Geometry from a Time Series [Text ] / N.H. Packard, J.P. Crutchfield, J.D. Farmer, R.S. Shaw // Phys. Rev. Lett. — 1980. — V. 45.
104. *Georgescu-Roegen N.* The Entropy Law and the Economic Process [Text] / N. Georgescu-Roegen. — Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1971.

105. *Grassberger P.* Characterization of Strange Attractors [Text] / P. Grassberger, I. Procaccia // Phys. Rev. Lett. — 1983. — V. 50.
106. *Harsanyi J.C.* Games with Incomplete Information Played by ‘Bayesian’ Players. Parts I—III [Text] / J.C. Harsanyi // Management Science. — 1967—1968.
107. *Hartley R.V.L.* Transmission of Information [Text] / R.V.L. Hartley // Bell System Technical Journal. — 1928. — V. 7. — No. 3.
108. *Kullback S.* On Information and Sufficiency [Text] / S. Kullback, R.A. Leibler // The Annals of Mathematical Statistics. — 1951. — V. 22. — No. 1.
109. *Kumar A.* Sorting Ultracold Atoms in a Three-Dimensional Optical Lattice in a Realization of Maxwell’s Demon [Text] / A. Kumar, T. Wu, F. Giraldo, D.S. Weiss. — 2018. — V. 561.
110. *Mandelbrot B.B.* A Multifractal Walk down Wall Street [Text] / B.B. Mandelbrot // Scientific American. — Feb., 1999.
111. *March T.K.* Recurrence Plot Statistics and the Effect of Embedding [Text] / T.K. March, S.C. Chapman, R.O. Dendy // Physica D. — 2005. — V. 200.
112. *Markowitz H.M.* Portfolio Selection [Text] / H.M. Markowitz // Journal of Finance. — March, 1952. — V. 7. — No. 1.
113. *Markowitz H.M.* Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments [Text] / H.M. Markowitz. — N. Y.: John Wiley & Sons, 1959.
114. *Marwan N.* Encounters with Neighbours (Current Developments of Concepts Based on Recurrence Plots and their Applications) [Text] / N. Marwan. — Potsdam: University of Potsdam, 2003.
115. *Marwan N.* Line Structures in Recurrence Plots [Text] / N. Marwan, J. Kurths // Phys. Lett. A. — 2005. — V. 336.
116. *Neumann J. von.* Theory of Games and Economic Behavior [Text] / J. von Neumann, O. Morgenstern. — Princeton: Princeton University Press, 1944.
117. *Nyquist H.* Certain Factors Affecting Telegraph Speed [Text] / H. Nyquist // Bell System Technical Journal. — 1924. — No. 3.
118. *Pincus S.* Irregularity, Volatility, Risk, and Financial Market Time Series [Text] / S. Pincus, R.E. Kalman // Proc. Nation. Acad. Sci. USA. — 2004. — V. 101. — No. 38.
119. *Procaccia I.* The Characterization of Fractal Measures as Interwoven Sets of Singularities: Global Universality at the Transition to Chaos [Text] / I. Procaccia // Dimensions and Entropies in Chaotic Systems / ed. by G. Mayer-Kress. — Berlin: Springer-Verlag, 1986.
120. *Manetti C.* Recurrence Analysis of Hydration Effect on Nonlinear Protein Dynamics: Multiplicative Scaling and Additive Processes [Text] / C. Manetti, A. Giuliani, M.A. Ceruso [et al.] // Phys. Lett. A. — 2001. — V. 281.
121. *Marwan N.* Recurrence Plots for the Analysis of Complex System [Text] / N. Marwan, M. Romano, M. Thiel, J. Kurths // Physics Reports. — 2007. — V. 438 (5-6).

122. *Renyi A.* On Measures of Entropy and Information [Text] / A. Renyi // Proc. Fourth Berkeley Symposium. — V. 1. — Berkeley, Calif.: University of California Press, 1961.
123. *Schreiber T.* Interdisciplinary Application of Nonlinear Time Series Methods [Text] / T. Schreiber // Phys. Reports. — 1999. — V. 308.
124. *Shannon C.E.* A Mathematical Theory of Communication [Text] / C.E. Shannon // Bell System Technical Journal. — 1948. — V. 27. — No. 3–4.
125. *Takens F.* Detecting Strange Attractors in Turbulence [Text] / F. Takens // Lecture Notes in Mathematics. — 1981. — V. 898.
126. *Thiel M.* Analytical Description of Recurrence Plots of White Noise and Chaotic Processes [Electronic resource] / M. Thiel, M.C. Romano, J. Kurths. — Potsdam: University of Potsdam, 2008. — 14 p. — URL: <http://arxiv.org/pdf/nlin/0301027v1.pdf>
127. *Tsallis C.* Entropic Nonextensivity: a Possible Measure of Complexity [Text] / C. Tsallis // Chaos, Solutions, & Fractals. — 2002. — V. 13.
128. *Tsallis C.* Nonextensive Statistics: Theoretical, Experimental and Computational Evidences and Connections [Text] / C. Tsallis // Brazilian Journal of Physics. — March, 1999. — V. 29. — No. 1.
129. *Tsallis C.* Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics [Text] / C. Tsallis // J. Stat. Phys. — 1988. — V. 52. — No. 1/2.
130. *Zbilut J.P.* Use of Recurrence Plots in the Analysis of Heart Beat Intervals [Text] / J.P. Zbilut, M. Koebbe, H. Loeb, G. Mayer-Kress // Proc. IEEE Conference on Computers in Cardiology Chicago. — 1991.
131. *Wald A.* Statistical Decision Functions [Text] / A. Wald // Ann. Math. Statist. — 1949. — V. 20. — No. 2.
132. *Zadeh L.A.* Fuzzy Sets [Text] / L.A. Zadeh // Information and Control. — 1965. — V. 8.
133. *Zbilut J.P.* Embeddings and Delays as Derived from Quantification of Recurrence Plots [Text] / J.P. Zbilut, C.L. Webber // Phys. Lett. A. — 1992. — V. 171.
134. *Zbilut J.P.* Recurrence Quantification Based Liapunov Exponent for Monitoring Divergence in Experimental Data [Text] / J.P. Zbilut, J.-M. Zaldívar-Comenges, F. Strozzi // Phys. Lett. A. — 2002. — V. 297.

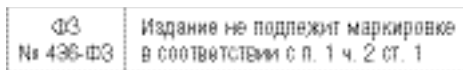


# Оглавление

<b>Основные сокращения и обозначения .....</b>	<b>3</b>
<b>Предисловие.....</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1. Эволюция взглядов на понятие энтропии.....</b>	<b>11</b>
1.1. Принцип Карно .....	12
1.2. Результаты Клапейрона .....	15
1.3. Термодинамическое определение энтропии .....	18
1.4. Статистическое определение энтропии.....	22
1.5. Энтропия Гиббса.....	26
1.6. Энтропия Шеннона .....	31
1.7. Энтропия Колмогорова.....	37
1.8. Энтропия Реньи .....	40
1.9. Энтропия Тсаллиса.....	43
1.10. Квантовая энтропия фон Неймана .....	46
1.11. Сущность энтропии и возможности применения энтропийного подхода.....	53
<b>Глава 2. Применение энтропии для моделирования процессов на финансовых рынках .....</b>	<b>58</b>
2.1. Энтропия Грассбергера — Прокаччия и показатель текущей волатильности рынка.....	61
2.2. Сравнение показателя текущей волатильности и энтропии Грассбергера — Прокаччия.....	71
<b>Глава 3. Энтропия и рекуррентный анализ временных рядов в экономике.....</b>	<b>81</b>
3.1. Основные понятия и термины.....	82
3.2. Меры сложности геометрических структур рекуррентных графиков .....	89
3.3. Локальный наклон линейной структуры.....	94
3.4. Меры рекуррентности.....	96
<b>Глава 4. Применение энтропии для игрового моделирования распределения ресурсов .....</b>	<b>105</b>
4.1. Основные понятия теории антагонистических игр .....	106
4.2. Основы теоретико-игрового моделирования экономики.....	116
4.3. Традиционная модель Марковица.....	120
4.4. Обобщенная модель Марковица при наличии антагонизма .....	127
4.5. Обобщенная модель Марковица при отсутствии информации .....	130
4.6. Формулы Фишберна .....	132
4.7. Сравнение применения теоретико-игрового и энтропийного подходов при поиске структуры эффективного портфеля.....	138
4.8. Поиск структуры эффективного портфеля в условиях неполной информации ....	144
4.9. Об эффективности портфелей, найденных теоретико-игровым методом .....	149
4.10. Обобщение формул Фишберна и их энтропийные свойства.....	154
<b>Заключение.....</b>	<b>188</b>
<b>Список использованной литературы .....</b>	<b>192</b>

*По вопросам приобретения книг обращайтесь:*  
**Отдел продаж «ИНФРА-М» (оптовая продажа):**  
127214, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр.1  
Тел. (495) 280-33-86 (доб. 218, 222)  
E-mail: bookware@infra-m.ru

•  
**Отдел «Книга—почтой»:**  
тел. (495) 280-33-86 (доб. 222)



*Научное издание*

**Королев Олег Леонидович,  
Куссый Михаил Юрьевич,  
Сигал Анатолий Викторович**

# **ПРИМЕНЕНИЕ ЭНТРОПИИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ**

Под редакцией *А.В. Сигала*

**МОНОГРАФИЯ**

Оригинал-макет подготовлен в НИЦ ИНФРА-М  
ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»  
127214, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1  
Тел.: (495) 280-15-96, 280-33-86. Факс: (495) 280-36-29  
E-mail: books@infra-m.ru <http://www.infra-m.ru>

Подписано в печать 11.04.2022.  
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Petersburg.  
Печать цифровая. Усл. печ. л. 17,31.  
Тираж 500 экз. Заказ № 00000  
ТК 771342-1858257-110422

Отпечатано в типографии ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»  
127214, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1  
Тел.: (495) 280-15-96, 280-33-86. Факс: (495) 280-36-29